第3回　情報量とエントロピー(2)

工学部 情報エレクトロニクス学科

情報科学研究院 情報理工学部門
大規模知識処理研究室

堀山 貴史

前回の復習: 情報量、エントロピー

曖昧さを表す尺度
(答の当てにくさ)

- **自己情報量**
  - 確率 p で生起する事象が起きたことを知ったときに得られる情報量

$$I(p) = -\log_2 p$$

- **平均情報量**
  - M個の互いに排反な事象$a_1, a_2, \cdots, a_M$ のうち1つの事象が起こったことを知ったときに得る情報量（期待値)

$$-\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i$$

- **確率変数** X のエントロピー（= 平均情報量）

$$\boldsymbol{H(X)} = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i$$

- **確率変数** X, Y の結合エントロピー
  - X と Y を組 (X, Y) にして、この組についてのエントロピー

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{M_X} \sum_{j=1}^{M_Y} P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j)$$

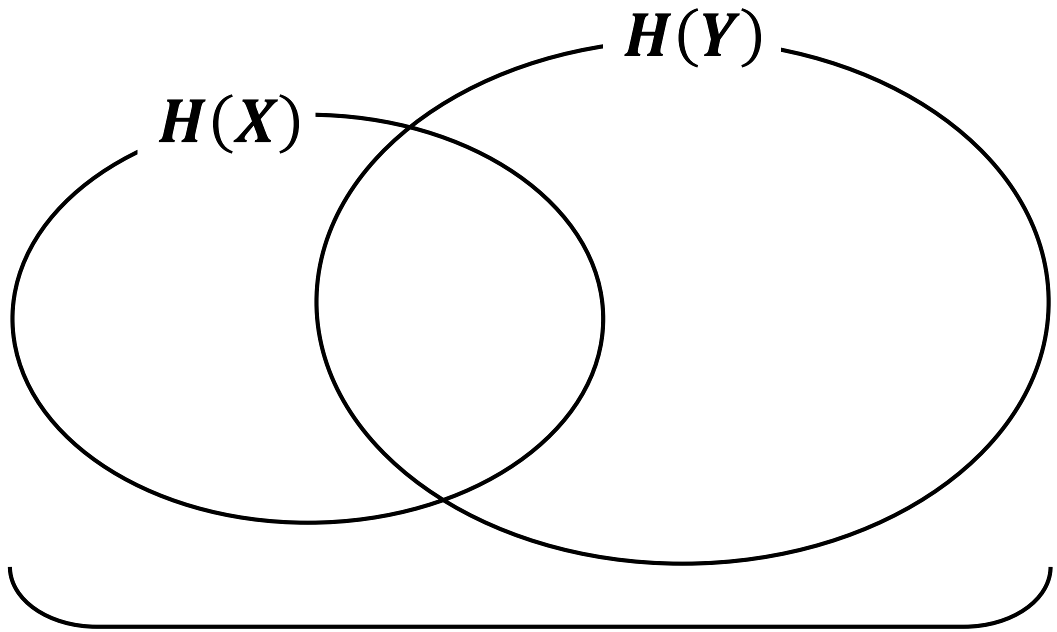
X: 天気が
晴、雨

Y: アイスが
売れた、
売れない

(晴、売れた)
(晴、売れない)
(雨、売れた)
(雨、売れない)

エントロピーに関するベン図

X: 天気が　晴、雨
Y: アイスが　売れた、売れない



結合エントロピー　$H(X,Y)$

$$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$$　（X, Y が独立のとき、等号成立 ）

今日、学習したいこと（前半）

例）

- 確率変数 X: 今日の天気　X = 晴 / X = 雨
- 確率変数 Y: 今日のアイスの売上
  Y = よく売れた / Y = 売れない

・今日アイスがよく売れた

今日の天気は…

Y が分かると、
X が当てやすくなる
（エントロピー？）

条件付きエントロピー（例）

$P(x,y)$		Y: アイスの売上 売れた	売れない	$P(x)$
X: 天気	晴	1/2	1/6	2/3
	雨	0	1/3	1/3
$P(y)$		1/2	1/2	

- 「Y = 売れた」とき
  - 「X = 晴」の確率　$\mathrm{P}(晴 \mid 売れた) = 1$
  - 「X = 雨」の確率　$\mathrm{P}(雨 \mid 売れた) = 0$
  - X についての曖昧さ（エントロピー）は

$$H(X|売れた) = \mathcal{H}(1)$$
$$= -1\log_2 1 - 0\log_2 0 = \mathbf{0}\ \text{(bit)}$$

$P(晴、売れた) = 1/2$

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

$P(売れた) = 1/2$

条件付きエントロピー（例）

$P(x,y)$		Y: アイスの売上 売れた	売れない	$P(x)$
X: 天気	晴	1/2	1/6	2/3
	雨	0	1/3	1/3
$P(y)$		1/2	1/2	

- 「Y = 売れない」とき
  - 「X = 晴」の確率　P(晴 | 売れない) = 1/3
  - 「X = 雨」の確率　P(雨 | 売れない) = 2/3
  - X についての曖昧さ（エントロピー）は

$$H(X|\text{売れない}) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} \fallingdotseq \mathbf{0.918}\ \text{(bit)}$$

P(晴、売れない) = 1/6

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

P(売れない) = 1/2

条件付きエントロピー（例）

$P(x,y)$		Y: アイスの売上		$P(x)$
		売れた	売れない	
X: 天気	晴	1/2	1/6	2/3
	雨	0	1/3	1/3
$P(y)$		$\boxed{1/2}$	$\boxed{1/2}$	

- 「Y = 売れた」とき

  $H(X|\text{売れない}) = \mathbf{0}$（bit）

- 「Y = 売れない」とき

  $H(X|\text{売れない}) \fallingdotseq \mathbf{0.918}$（bit）

- それぞれの確率は $P(\text{売れた}) = \frac{1}{2}$、$P(\text{売れない}) = \frac{1}{2}$ なので、この割合で平均すると

  $\boldsymbol{H(X|Y)} \fallingdotseq \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0.918 = \mathbf{0.459}$（bit）

$H(X) \fallingdotseq 0.918$ より小さい
つまり、Y を知ることで、
X の曖昧さが小さくなった

条件付きエントロピー（例）

$P(x,y)$		Y: アイスの売上		$P(x)$
		売れた	売れない	
X: 天気	晴	$1/2$	$1/6$	$2/3$
	雨	0	$1/3$	$1/3$
$P(y)$		$1/2$	$1/2$	

$\boldsymbol{H(Y|X)}$ も
求められる

- 「X = 晴」のとき

  $H(Y|\text{晴}) =$

- 「X = 雨」のとき

  $H(Y|\text{雨}) =$

- 条件付きエントロピー $\boldsymbol{H(Y|X)}$ は

条件付きエントロピー（例）

$H(Y|X)$ も求められる

$P(x,y)$		Y: アイスの売上		$P(x)$
		売れた	売れない	
X: 天気	晴	1/2	1/6	2/3
	雨	0	1/3	1/3
$P(y)$		1/2	1/2	

- 「X = 晴」のとき

$$H(Y|\text{晴}) = -\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} \fallingdotseq 0.811\ \text{(bit)}$$

- 「X = 雨」のとき

$$H(Y|\text{雨}) = -0\log_2 0 - 1\log_2 1 \fallingdotseq 0\ \text{(bit)}$$

- 条件付きエントロピー **$H(Y|X)$** は

$$\boldsymbol{H(Y|X) = \frac{2}{3} \times 0.811 + \frac{1}{3} \times 0} \fallingdotseq 0.541\ \text{(bit)}$$

$H(Y) \fallingdotseq 1$ より小さい
つまり、X を知ることで、
Y の曖昧さが小さくなった

条件付きエントロピー

定義2.6

確率変数 Y で条件を付けた X の**条件付きエントロピー** $H(X|Y)$ は,

により定義される．ただし，$\{x_1, x_2, \ldots, x_{M_X}\}$ および $\{y_1, y_2, \ldots, y_{M_Y}\}$ は，それぞれ X と Y が取りうる値の集合とする．

参考：Y を知る前と後という意味で、
$H(X)$ を事前エントロピー、$H(X|Y)$ を事後エントロピーと呼ぶこともある

条件付きエントロピー

定義2.6

確率変数 Y で条件を付けた X の**条件付きエントロピー** $H(X|Y)$ は,

$$H(X|Y) = -\sum_{j=1}^{M_Y} P(y_j) \sum_{i=1}^{M_X} P\left(x_i|\, y_j\right) \log_2 P(x_i|y_j)$$

により定義される．ただし，$\{x_1, x_2, \dots, x_{M_X}\}$ および $\{y_1, y_2, \dots, y_{M_Y}\}$ は，それぞれ X と Y が取りうる値の集合とする.

参考：Y を知る前と後という意味で、
$H(X)$ を事前エントロピー、$H(X|Y)$ を事後エントロピーと呼ぶこともある

条件付きエントロピーの性質

定理2.3

$\{x_1, x_2, \ldots, x_{M_X}\}$ および $\{y_1, y_2, \ldots, y_{M_Y}\}$ をとりうる値の集合とする確率変数 X および Y に関し，以下が成り立つ．

(1) $H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{M_X} \sum_{j=1}^{M_Y} P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i|y_j)$

(2)

(3) $0 \le H(X|Y) \le H(X)$
（$H(X|Y) = H(X)$ は、X と Y が独立の時のみ成立）

(4) $0 \le H(Y|X) \le H(Y)$
（$H(Y|X) = H(Y)$ は、X と Y が独立の時のみ成立）

別の情報を得ると，エントロピーは変化しないか減少する

条件付きエントロピーの性質

定理2.3

$\{x_1, x_2, \dots, x_{M_X}\}$ および $\{y_1, y_2, \dots, y_{M_Y}\}$ をとりうる値の集合とする確率変数 X および Y に関し，以下が成り立つ.

(1) $H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{M_X} \sum_{j=1}^{M_Y} P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i|y_j)$

(2) $\boldsymbol{H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)}$

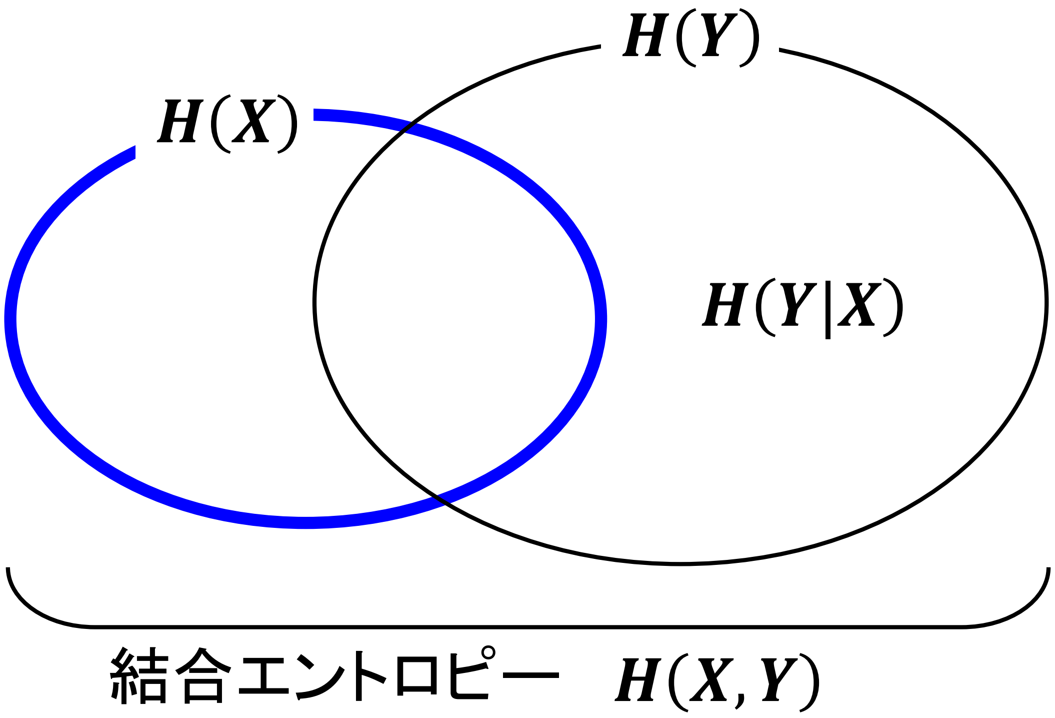
(3) $0 \le H(X|Y) \le H(X)$
（$H(X|Y) = H(X)$ は、X と Y が独立の時のみ成立）

(4) $0 \le H(Y|X) \le H(Y)$
（$H(Y|X) = H(Y)$ は、X と Y が独立の時のみ成立）

別の情報を得ると，エントロピーは変化しないか減少する

エントロピーに関するベン図

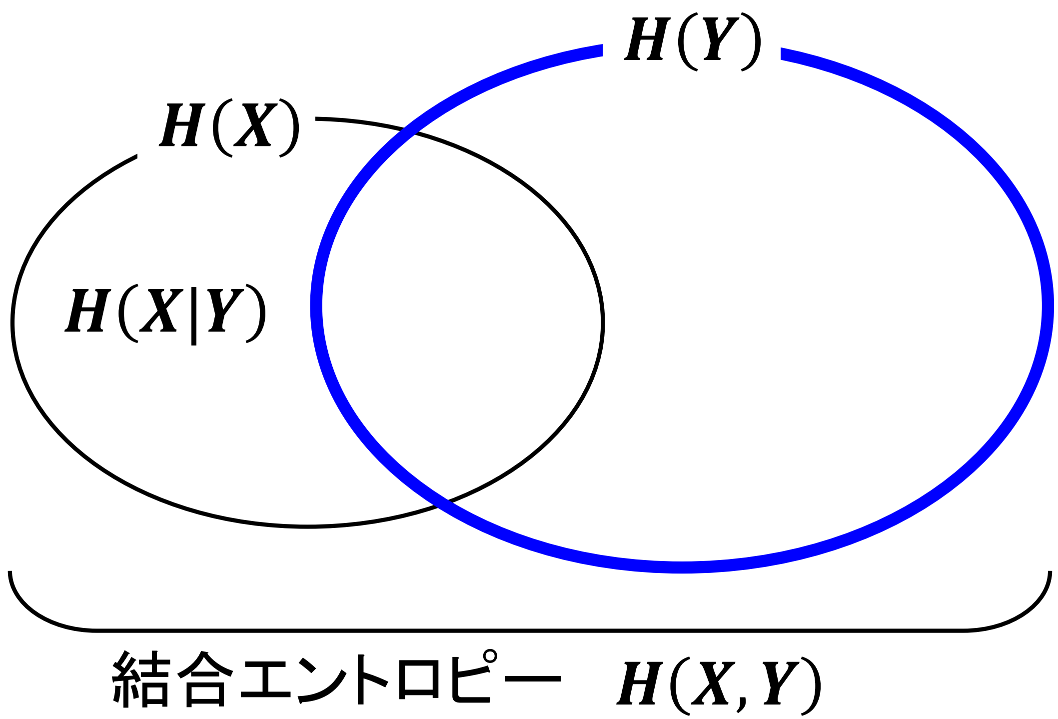
X: 天気が　晴、雨
Y: アイスが　売れた、売れない



$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$

エントロピーに関するベン図

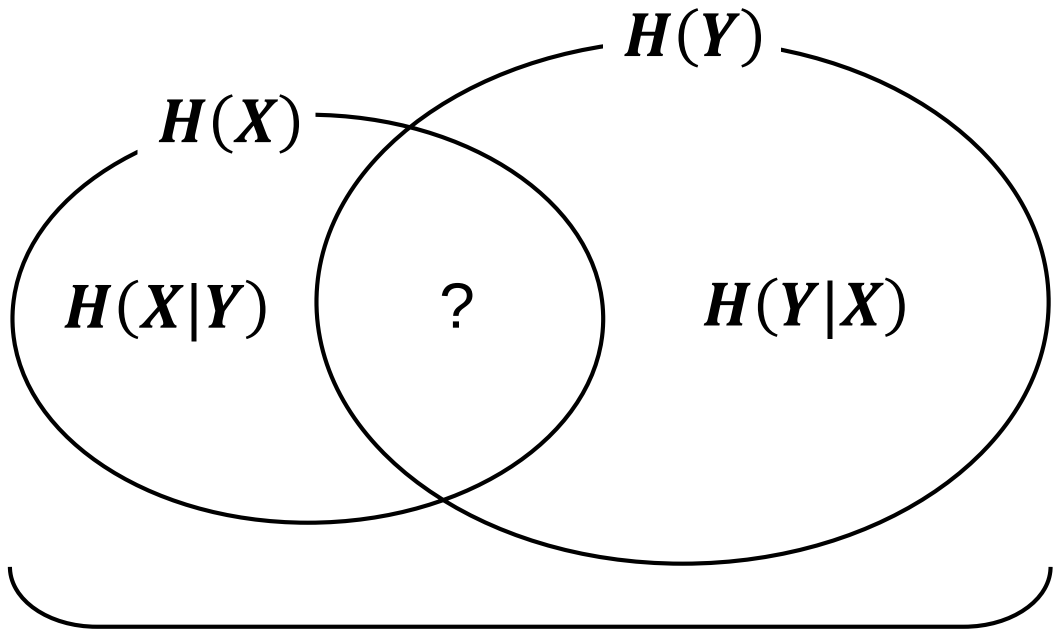
X: 天気が 晴、雨
Y: アイスが 売れた、売れない



$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$$

エントロピーに関するベン図

X: 天気が 晴、雨
Y: アイスが 売れた、売れない



結合エントロピー $H(X,Y)$

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$$

相互情報量

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$P(x,y)$</td><td colspan="2">Y: アイスの売上</td><td rowspan="2">$P(x)$</td></tr>
<tr><td>売れた</td><td>売れない</td></tr>
<tr><td rowspan="2">X: 天気</td><td>晴</td><td>1/2</td><td>1/6</td><td>2/3</td></tr>
<tr><td>雨</td><td>0</td><td>1/3</td><td>1/3</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P(y)$</td><td>1/2</td><td>1/2</td><td></td></tr>
</table>

- 天気 X についての曖昧さは
  $\boldsymbol{H(X)} \fallingdotseq \mathbf{0.918}$ (bit)
- アイスの売上 Y を知ることで、天気 X の曖昧さは
  $\boldsymbol{H(X|Y)} \fallingdotseq \mathbf{0.459}$ (bit) に 減る
- つまり、Y を知ることで、X について
  $\boldsymbol{I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)} \fallingdotseq 0.918 - 0.459 = \mathbf{0.459}$ (bit)

  だけ 曖昧さが減る

$H(Y) - H(Y|X)$ も求めてみよう

相互情報量と、その性質

定義2.7

確率変数XとYの**相互情報量** $I(X;Y)$ は,

$$I(X;Y) = \mathrm{H(X)} - \mathrm{H(X|Y)}$$

により定義される.

定理2.4

確率変数XとYの相互情報量 $I(X;Y)$ に関して以下が成り立つ.

（1）$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$

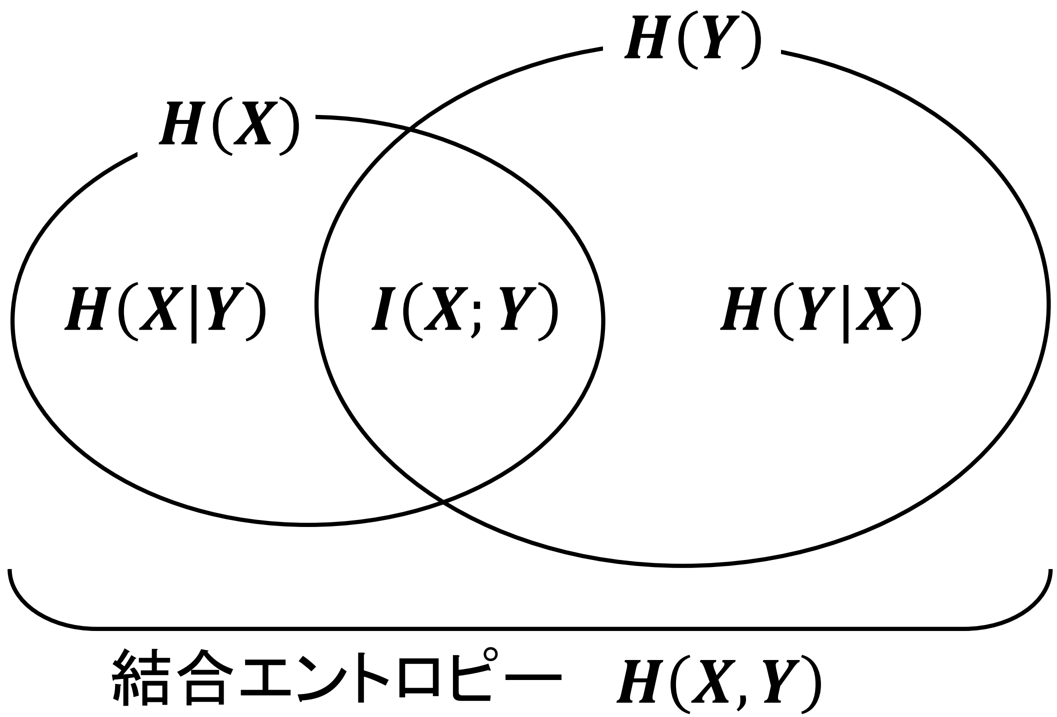
$$= H(Y) - H(Y|X)$$

$$= H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

（2）$0 \leq I(X;Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$

（$I(X;Y) = 0$ は、X と Y が独立の時のみ成立）

相互情報量



（1） $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$

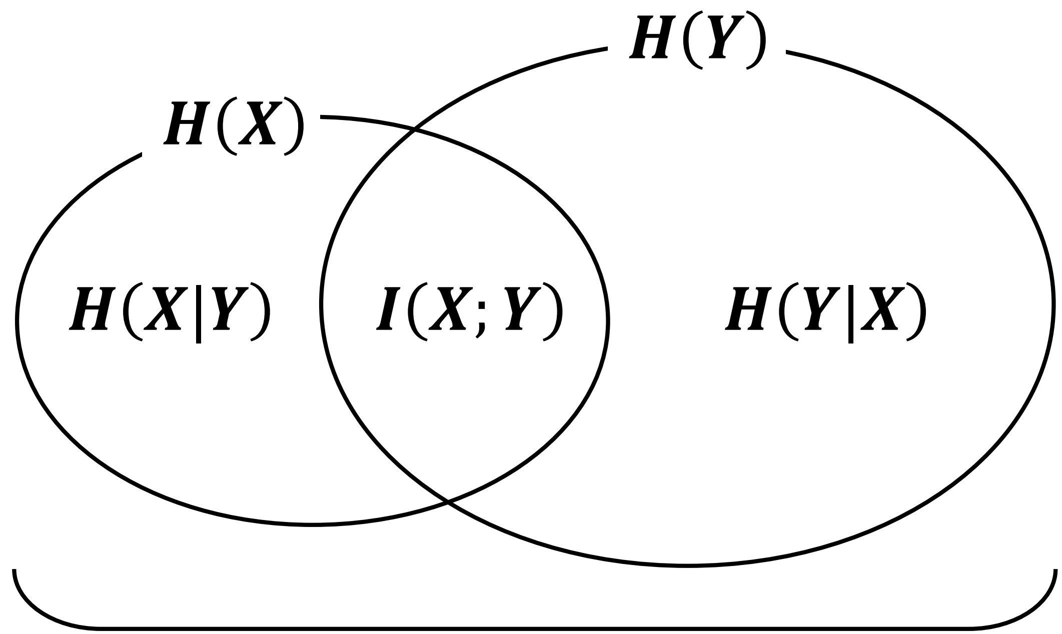
$$= H(Y) - H(Y|X)$$

$$= H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

（2） $0 \leq I(X;Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$

（$I(X;Y) = 0$ は、X と Y が独立の時のみ成立）

今日のまとめ



結合エントロピー $\boldsymbol{H(X,Y)}$

- **条件付きエントロピー**
  - 確率変数 Y を知った後での、確率変数 X のエントロピー

$$H(X|Y) = -\sum_{j=1}^{M_Y} P(y_j) \sum_{i=1}^{M_X} P\left(x_i|\, y_j\right) \log_2 P(x_i|y_j)$$

- **相互情報量**

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \end{aligned}$$