大規模知識処理特論 (第 5 回)　練習問題　略解

p.11 練習問題

行列 A の列ベクトルは、$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

$(A_1 A_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ の rank は 2 であるので、A_1 と A_2 は線形独立である。

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ を解くと、$x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ を得る。

よって、基底ベクトル A_1, A_2 に対する基底解は $x = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

※ x_1, x_2 が非負なので、この基底解は実行可能基底解である。

p.12 練習問題

A_1, A_2 に対する基底解は $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

A_1, A_3 に対する基底解は $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

A_1, A_4 に対する基底解は $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。

A_2, A_3 に対する基底解は $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

A_2, A_4 に対する基底解は $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ である。

A_3, A_4 に対する基底解は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ である。

$(x_1, x_2) = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{8}{3}, 0)$, $(2, 0)$, $(0, \frac{4}{3})$, $(0, 2)$, $(0, 0)$ が、4 つの直線 $2x_1 + 2x_2 = 4$, $3x_1 + 6x_2 = 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ の交点であることを確認してほしい。また、実行可能基底解が実行可能領域の端点に対応することを確認してほしい。

p.16 練習問題

$A_1,\, A_2,\, A_3,\, A_4,\, A_5$ から線形独立な 3 つの列ベクトルを選び、基底ベクトルとする。
選び方は全部で $\binom{5}{3} = 10$ 通りあり、それぞれの基底解は以下の通りである。

・$A_1,\, A_2,\, A_3$ の基底解 $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0)$
・$A_1,\, A_2,\, A_4$ の基底解 $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0)$
・$A_1,\, A_2,\, A_5$ の基底解 $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0)$
・$A_1,\, A_3,\, A_4$ の基底解 $(4, 0, -4, -4, 0)$
・$A_1,\, A_3,\, A_5$ の基底解 $(\frac{8}{3}, 0, -\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3})$
・$A_1,\, A_4,\, A_5$ の基底解 $(2, 0, 0, 2, 2)$
・$A_2,\, A_3,\, A_4$ の基底解 $(0, 1, 2, 2, 0)$
・$A_2,\, A_3,\, A_5$ の基底解 $(0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0, -\frac{4}{3})$
・$A_2,\, A_4,\, A_5$ の基底解 $(0, 2, 0, -4, -4)$
・$A_3,\, A_4,\, A_5$ の基底解 $(0, 0, 4, 8, 4)$

p.24 練習問題

x_2 を基底変数に、x_4 を非基底変数にするので、$x_4 = \ldots$ の式を $x_2 = \ldots$ の式に変形し、他の式に代入する。

$$
\begin{aligned}
z &= -9 - x_1 + x_4 \\
x_3 &= 1 - x_1 + \tfrac{1}{3}x_4 \\
x_2 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{6}x_4
\end{aligned}
$$