大規模知識処理特論 (第 6 回) 補足資料　練習問題　略解

p.9 練習問題

(a) 標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & w = & x_4 \\ \text{subject to} & & -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

これを単体法で解く。

		x_1	x_2	x_3
w	1	1	1	1
x_4	1	1	1	1

人工問題の最適値 $w^* > 0$ なので、もとの問題が実行不能と分かる。

(b) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & z = & -x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & & -x_1 - \ x_2 + x_3 = 1 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & w = & x_4 \\ \text{subject to} & & -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

これを単体法で解く。

		x_1	x_2	x_3
w	1	1	1	-1
x_4	1	1	1	-1

$(1, 3)$ のピボット

		x_1	x_2	x_4
w	0	0	0	1
x_3	1	1	1	-1

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_4 を含まないので、
$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

		x_1	x_2
z	0	-1	-2
x_3	1	1	1

x_2 の増加に伴って x_3 も増加し、非有界である (つまり無限に最小化できる) ことが分かる。

(c) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & z = & -x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & & x_1 + \ x_2 - x_3 = 1 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & w = x_4 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

これを単体法で解く。

		x_1	x_2	x_3
w	1	-1	-1	1
x_4	1	-1	-1	1

$(1,1)$ のピボット

		x_4	x_2	x_3
w	0	1	0	0
x_1	1	-1	-1	1

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_4 を含まないので、
$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

		x_2	x_3
z	-1	-1	-1
x_1	1	-1	1

$(1,1)$ のピボット

		x_1	x_3
z	-2	1	-2
x_2	1	-1	1

x_3 の増加に伴って x_2 も増加し、非有界である (つまり無限に最小化できる) ことが分かる。

p.10 練習問題

(a) 標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & w = x_3 + x_4 \\
\text{subject to} & -x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
 & -2x_1 - x_2 + x_4 = 8 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

これを単体法で解く。

		x_1	x_2
w	10	3	2
x_3	2	1	1
x_4	8	2	1

人工問題の最適値 $w^* > 0$ なので、もとの問題が実行不能と分かる。

p.10 練習問題

(b) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z = 3x_1 + \ \ x_2 \\ \text{subject to} & \quad\ x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 4 \\ & \quad\ x_1 + 2x_2 \qquad\ \ = 5 \\ & \quad\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = x_4 + x_5 \\ \text{subject to} & \quad x_1 + \ \ x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 4 \\ & \quad x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 5 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

これを単体法で解く。

$$\begin{array}{c|c|ccc|} & & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline w & 9 & -2 & -3 & -1 \\ \hline x_4 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ x_5 & 5 & -1 & -2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$(2,2)$ のピボット

$$\begin{array}{c|c|ccc|} & & x_1 & x_5 & x_3 \\ \hline w & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \hline x_4 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ x_2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$(1,3)$ のピボット

$$\begin{array}{c|c|ccc|} & & x_1 & x_5 & x_4 \\ \hline w & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline x_3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ x_2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline \end{array}$$

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_4, x_5 を含まないので、
$(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

$$\begin{array}{c|c|c|} & & x_1 \\ \hline z & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \hline x_3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ x_2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

したがって、標準形の問題は、$(x_1, x_2) = (0, \frac{5}{2})$ の時に最適値 $\frac{5}{2}$ をとる。
もとの問題の最適値は $-\frac{5}{2}$ となる。

p.11 練習問題

(a) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z = -x_1 - 4x_2 \\ \text{subject to} & \quad 2x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad = 8 \\ & \quad\ \ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 10 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & w = x_5 + x_6 \\
\text{subject to} & 2x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad = 8 \\
 & \ \ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad + x_6 = 10 \\
 & \ \ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

これを単体法で解く。

		x_1	x_2	x_3	x_4
w	18	-3	-3	-1	-1
x_5	8	-2	-1	-1	0
x_6	10	-1	-2	0	-1

$(1,1)$ のピボット

		x_5	x_2	x_3	x_4
w	6	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_6	6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1

$(2,2)$ のピボット

		x_5	x_6	x_3	x_4
w	0	1	1	0	0
x_1	2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_5, x_6 を含まないので、
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 0, 0)$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

		x_3	x_4
z	-18	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_1	2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

$(1,1)$ のピボット

		x_1	x_4
z	-20	1	2
x_3	3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	5	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

したがって、標準形の問題は、$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 5, 3, 0)$ の時に最適値 -20 をとる。
もとの問題は、$(x_1, x_2) = (0, 5)$ の時に最適値は 20 をとる。

(b) 標準形は、以下のようになる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & z = -x_1 - 4x_2 \\
\text{subject to} & 2x_1 + \ \ x_2 - x_3 \qquad = 8 \\
 & \ \ x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 10 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & w = x_5 + x_6 \\
\text{subject to} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 8 \\
 & x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 10 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

これを単体法で解く。

		x_1	x_2	x_3	x_4
w	18	-3	-3	1	1
x_5	8	-2	-1	1	0
x_6	10	-1	-2	0	1

$(1,1)$ のピボット

		x_5	x_2	x_3	x_4
w	6	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_6	6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

$(2,2)$ のピボット

		x_5	x_6	x_3	x_4
w	0	1	1	0	0
x_1	2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_5, x_6 を含まないので、
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 0, 0)$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

		x_3	x_4
z	-18	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$
x_1	2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	4	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$(1,2)$ のピボット

		x_3	x_1
z	-32	-4	7
x_4	6	2	-3
x_2	8	1	-2

x_3 の増加に伴って x_2, x_4 も増加し、非有界である (つまり無限に最小化できる) ことが分かる。