大規模知識処理特論 (第 7 回) 補足資料　練習問題　略解

p.4 練習問題

(a) 双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{array}{lrl} \text{maximize} & w = & 9y_2 \\ \text{subject to} & & 5y_1 + 2y_2 \leq -5 \\ & & 2y_1 - 2y_2 \leq 1 \\ & & -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ & & 3y_1 + 2y_2 \leq -1 \\ & & y_1, y_2 : \text{自由変数} \end{array}$$

主問題の最適解が $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{3}{4}, 0, \frac{15}{4}, 0)$ であるので、相補性定理より

$$\begin{aligned} 5y_1 + 2y_2 &= -5 \\ -y_1 + 2y_2 &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。これを解いて、双対問題の最適解は $(y_1, y_2) = (-1, 0)$, 最適値は 0 となる。

※ 双対問題の最適値は、強双対定理より、主問題の最適値と同じ。

※ 双対問題の最適解での各変数の値を目的関数に入れて計算することで、
主問題と双対問題の最適値が同じになっているか確認できる。

(b) 双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{array}{lrl} \text{maximize} & w = & 8y_1 + 10y_2 \\ \text{subject to} & & 3y_1 + y_2 \leq 2 \\ & & -y_1 + 3y_2 \leq -3 \\ & & 2y_1 - 2y_2 \leq -2 \\ & & 3y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ & & y_1, y_2 : \text{自由変数} \end{array}$$

主問題の最適解が $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 9, \frac{17}{2}, 0)$ であるので、相補性定理より

$$\begin{aligned} -y_1 + 3y_2 &= -3 \\ 2y_1 - 2y_2 &= -2 \end{aligned}$$

が成り立つ。これを解いて、双対問題の最適解は $(y_1, y_2) = (-3, -2)$, 最適値は -44 となる。

※ 主問題が標準形になっていなくても、その双対問題を作ることができます。