

大規模知識処理特論 (第7回) 練習問題 略解

p.7 練習問題

(a) 双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= 7y_1 + 8y_2 + 9y_3 \\ \text{subject to } y_1 + y_3 &\geq 4 \\ 2y_1 + y_2 &\geq 3 \\ 2y_2 + y_3 &= 2 \\ y_1 : \text{自由変数}, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) 双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 7y_1 + 8y_2 + 9y_3 \\ \text{subject to } y_1 + y_3 &\leq 4 \\ 2y_1 + y_2 &\leq 3 \\ 2y_2 + y_3 &= 2 \\ y_1 : \text{自由変数}, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

p.8 練習問題

(1-a) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to } -x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって、双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{maximize } w &= y_1 \\ \text{subject to } -y_1 &\leq -1 \\ -y_1 &\leq -2 \\ y_1 &\leq 0 \\ y_1 : \text{自由変数} \end{aligned}$$

(1-b) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to } -x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって、双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{maximize } w &= y_1 \\ \text{subject to } -y_1 &\leq -1 \\ -y_1 &\leq -2 \\ -y_1 &\leq 0 \\ y_1 : \text{自由変数} \end{aligned}$$

(1-c) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= -4x_1 - 2x'_2 + 2x''_2 \\ \text{subject to } 2x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + s_1 &= 4 \\ 3x_1 + 6x'_2 - 6x''_2 - s_2 &= 9 \\ x_1, x'_2, x''_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって、双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } w = 4y_1 + 9y_2 \\
&\text{subject to } 2y_1 + 3y_2 \leq -4 \\
&\quad 2y_1 + 6y_2 \leq -2 \\
&\quad -2y_1 - 6y_2 \leq 2 \\
&\quad y_1 \leq 0 \\
&\quad -y_2 \leq 0 \\
&\quad y_1, y_2 : \text{自由変数}
\end{aligned}$$

(1-d) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{minimize } z = -3x_1 - 5x_2 - 4x'_3 + 4x''_3 \\
&\text{subject to } 4x_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 + s_1 = 6 \\
&\quad -3x_1 + 4x_2 - 5x'_3 + 5x''_3 - s_2 = 2 \\
&\quad x_1, x_2, x'_3, x''_3, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}$$

したがって、双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } w = 6y_1 + 2y_2 \\
&\text{subject to } 4y_1 - 3y_2 \leq -3 \\
&\quad 2y_1 + 4y_2 \leq -5 \\
&\quad 3y_1 - 5y_2 \leq -4 \\
&\quad -3y_1 + 5y_2 \leq 4 \\
&\quad y_1 \leq 0 \\
&\quad -y_2 \leq 0 \\
&\quad y_1, y_2 : \text{自由変数}
\end{aligned}$$

(1-e) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{minimize } z = -4x_1 - 5x_2 \\
&\text{subject to } 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
&\quad 3x_1 + 6x_2 + x_4 = 8 \\
&\quad x_1 + 4x_2 + x_5 = 4 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

したがって、双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{maximize } w = 4y_1 + 8y_2 + 4y_3 \\
&\text{subject to } 2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq -4 \\
&\quad 2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \leq -5 \\
&\quad y_1 \leq 0 \\
&\quad y_2 \leq 0 \\
&\quad y_3 \leq 0 \\
&\quad y_1, y_2, y_3 : \text{自由変数}
\end{aligned}$$

(1-f) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{minimize } z = -4x_1 - 2x_2 \\
&\text{subject to } x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\
&\quad x_1 + x_4 = 6 \\
&\quad x_1 + 2x_2 - x_5 = 2 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

したがって、双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} && w = 8y_1 + 6y_2 + 2y_3 \\
&\text{subject to} && y_1 + y_2 + y_3 \leq -4 \\
&&& y_1 + 2y_3 \leq -2 \\
&&& y_1 \leq 0 \\
&&& y_2 \leq 0 \\
&&& -y_3 \leq 0 \\
&&& y_1, y_2, y_3 : \text{自由変数}
\end{aligned}$$

(2) 資料 p.6 参照。

p.15 練習問題

この問題の標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} && z = -x_1 - 2x_2 \\
&\text{subject to} && x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\
&&& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

この標準形の双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} && w = y_1 \\
&\text{subject to} && y_1 \leq -1 \\
&&& y_1 \leq -2 \\
&&& -y_1 \leq 0 \\
&&& y_1 : \text{自由変数}
\end{aligned}$$

制約条件の3つの式を同時に満たす y_1 は存在しないので、双対問題は実行不能である。

双対問題に対し、標準形を求め、二段階法を適用することでも、双対問題が実行不能であることは確認できる。

p.15 練習問題

(a) この問題の標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} && z = -x_1 - 2x_2 \\
&\text{subject to} && -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
&&& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

この標準形の双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} && w = y_1 \\
&\text{subject to} && -y_1 \leq -1 \\
&&& -y_1 \leq -2 \\
&&& y_1 \leq 0 \\
&&& y_1 : \text{自由変数}
\end{aligned}$$

制約条件の3つの式を同時に満たす y_1 は存在しないので、双対問題は実行不能である。

主問題は非有界、双対問題は実行不能である。

(b) この問題の標準形は、以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

この標準形の双対問題は、以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & w = y_1 \\ \text{subject to} & -y_1 \leq -1 \\ & -y_1 \leq -2 \\ & -y_1 \leq 0 \\ & y_1 : \text{自由変数} \end{array}$$

制約条件の3つの式は $y_1 \geq 2$ であればよく、双対問題の目的関数値を任意に大きくすることができる。つまり、双対問題は非有界である。

主問題は実行不能、双対問題は非有界である。