

大規模知識処理特論 最適化(3) 補足資料 練習問題 略解

p.9 練習問題

- (a) 標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad w &= x_4 \\ \text{subject to} \quad -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

これを単体法で解く。

	x_1	x_2	x_3	
w	1	1	1	1
x_4	1	1	1	1

人工問題の最適値 $w^* > 0$ なので、もとの問題が実行不能と分かる。

- (b) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \quad -x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad w &= x_4 \\ \text{subject to} \quad -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

これを単体法で解く。

	x_1	x_2	x_3	
w	1	1	1	-1
x_4	1	1	1	-1

(1,3) のピボット

	x_1	x_2	x_4	
w	0	0	1	
x_3	1	1	1	-1

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_4 を含まないので、 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

	x_1	x_2	
z	0	-1	-2
x_3	1	1	1

x_2 の増加に伴って x_3 も増加し、非有界である（つまり無限に最小化できる）ことが分かる。

- (c) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \quad x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & w = x_4 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

これを単体法で解く。

	x_1	x_2	x_3	
w	1	-1	-1	1
x_4	1	-1	-1	1

(1, 1) のピボット

	x_4	x_2	x_3	
w	0	1	0	0
x_1	1	-1	-1	1

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_4 を含まないので、 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

	x_2	x_3	
z	-1	-1	-1
x_1	1	-1	1

(1, 1) のピボット

	x_1	x_3	
z	-2	1	-2
x_2	1	-1	1

x_3 の増加に伴って x_2 も増加し、非有界である（つまり無限に最小化できる）ことが分かる。

p.10 練習問題

(a) 標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & w = x_3 + x_4 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & -2x_1 - x_2 + x_4 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

これを単体法で解く。

	x_1	x_2	
w	10	3	2
x_3	2	1	1
x_4	8	2	1

人工問題の最適値 $w^* > 0$ なので、もとの問題が実行不能と分かる。

p.10 練習問題

(b) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = x_4 + x_5 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

これを単体法で解く。

	x_1	x_2	x_3	
w	9	-2	-3	-1
x_4	4	-1	-1	-1
x_5	5	-1	-2	0

(2, 2) のピボット

	x_1	x_5	x_3	
w	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1
x_4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
x_2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

(1, 3) のピボット

	x_1	x_5	x_4	
w	0	0	1	1
x_3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
x_2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_4, x_5 を含まないので、
 $(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

	x_1	
z	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$

したがって、標準形の問題は、 $(x_1, x_2) = (0, \frac{5}{2})$ の時に最適値 $\frac{5}{2}$ をとる。
もとの問題の最適値は $-\frac{5}{2}$ となる。

p.11 練習問題

(a) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z = -x_1 - 4x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = x_5 + x_6 \\ \text{subject to} & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 8 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

これを単体法で解く。

	x_1	x_2	x_3	x_4
w	18	-3	-3	-1
x_5	8	-2	-1	-1
x_6	10	-1	-2	0

(1, 1) のピボット

	x_5	x_2	x_3	x_4
w	6	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_6	6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

(2, 2) のピボット

	x_5	x_6	x_3	x_4
w	0	1	1	0
x_1	2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_5, x_6 を含まないので、
 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 0, 0)$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

	x_3	x_4
z	-18	$-\frac{2}{3}$
x_1	2	$-\frac{2}{3}$
x_2	4	$\frac{1}{3}$

(1, 1) のピボット

	x_1	x_4
z	-20	1
x_3	3	$-\frac{3}{2}$
x_2	5	$-\frac{1}{2}$

したがって、標準形の問題は、 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 5, 3, 0)$ の時に最適値 -20 をとる。
もとの問題は、 $(x_1, x_2) = (0, 5)$ の時に最適値は 20 をとる。

(b) 標準形は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= -x_1 - 4x_2 \\ \text{subject to } 2x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

標準形から、人工問題を以下のように作成する。

$$\begin{aligned} \text{minimize } w &= x_5 + x_6 \\ \text{subject to } 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

これを単体法で解く。

	x_1	x_2	x_3	x_4
w	18	-3	-3	1
x_5	8	-2	-1	1
x_6	10	-1	-2	0

(1, 1) のピボット

	x_5	x_2	x_3	x_4
w	6	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_1	4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_6	6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(2, 2) のピボット

	x_5	x_6	x_3	x_4
w	0	1	1	0
x_1	2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

人工問題の最適値 $w^* = 0$ であり、基底変数に人工変数 x_5, x_6 を含まないので、
 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 4, 0, 0)$ が、標準形の問題の実行可能基底解。

標準形の問題を単体法で解く。

	x_3	x_4
z	-18	$\frac{2}{3}$
x_1	2	$-\frac{1}{3}$
x_2	4	$-\frac{7}{3}$

(1, 2) のピボット

	x_3	x_1
z	-32	-4
x_4	6	7
x_2	8	-3

x_3 の増加に伴って x_2, x_4 も増加し、非有界である（つまり無限に最小化できる）ことが分かる。