大規模知識処理特論 **最適化 (3)**

練習問題　略解

p.7 練習問題

(a) x_3, x_4 を基底変数とする。

		x_1	x_2
z	0	-4	-6
x_3	4	-2	-2
x_4	9	-3	-6

補足説明:

x_1 と x_2 の相対コスト係数が共に負なので、絶対値の大きい x_2 (2 列目) をピボットイン変数とする。$x_1 = 0$ 固定のまま、x_2 を 0 から増やしていく。$x_2 = \frac{3}{2}$ を越えると $x_4 \geq 0$ を満たさなくなるので、x_4 (2 行目) をピボットアウト変数とする。

(2, 2) のピボット

2 行目の変数と 2 列目の変数を入れ換える。

		x_1	x_4
z	-9	-1	1
x_3	1	-1	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$

x_1 (1 列目) の相対コスト係数のみが負なので、これをピボットイン変数とする。$x_4 = 0$ 固定のまま、x_1 を 0 から増やしていく。$x_1 = 1$ を越えると $x_3 \geq 0$ を満たさなくなるので、x_3 (1 行目) をピボットアウト変数とする。

(1, 1) のピボット

1 行目の変数と 1 列目の変数を入れ換える。

		x_3	x_4
z	-10	1	$\frac{2}{3}$
x_1	1	-1	$\frac{1}{3}$
x_2	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

すべての非基底変数の相対コスト係数が非負なので、最適解が得られたことが分かる。

以上より、最適解は $x = (1, 1, 0, 0)$ で、最適値は -10 と分かる。

※ 最初の (2, 2) のピボットでの操作は、“最適化 (2)” 資料 p.24 の練習問題と同じ。変数名を何回も書かなくてすむので、“最適化 (2)” 資料 p.24 の方法ではなく、こちらの方法がおすすめ。

(b) x_3, x_4 を基底変数とする。

		x_1	x_2
z	0	-4	-5
x_3	4	-2	-2
x_4	8	-3	-6

(2, 2) のピボット

		x_1	x_4
z	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$
x_3	$\frac{4}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$

(1, 1) のピボット

		x_3	x_4
z	$-\frac{26}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{4}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

以上より、最適解は $x = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ で、最適値は $-\frac{26}{3}$ と分かる。

(c) x_3, x_4, x_5 を基底変数とする。

		x_1	x_2
z	0	-4	-5
x_3	4	-2	-2
x_4	8	-3	-6
x_5	4	-1	-4

$(3,2)$ のピボット

		x_1	x_5
z	-5	$-\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_3	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_4	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_2	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

補足説明: ピボットイン変数は、x_1。$x_5 = 0$ 固定のまま、x_1 を 0 から増やしていく。$x_1 = \frac{4}{3}$ を越えると $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ を同時に満たさなくなる。x_3, x_4 のいずれをピボットアウト変数としても構わないが、ここでは最小の添え字の x_3 をピボットアウト変数とする。

$(1,1)$ のピボット

		x_3	x_5
z	$-\frac{26}{3}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_4	0	1	1
x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$

以上より、最適解は $x = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0)$ で、最適値は $-\frac{26}{3}$ と分かる。

(d) 各製品の生産量を x_1, x_2, x_3 とする。

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{subject to} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 7 \\
& 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\
& 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

これを標準形に変換すると、以下のようになる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & z = -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\
\text{subject to} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 7 \\
& 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 9 \\
& 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_7 = 8
\end{array}
$$

この問題を単体法 (シンプレックス法) で解く。
x_4, x_5, x_6, x_7 を基底変数とする。

		x_1	x_2	x_3
z	0	-3	-5	-4
x_4	6	-4	-2	-1
x_5	7	-1	-2	-4
x_6	9	-5	-2	-3
x_7	8	-3	-3	-2

$(4,2)$ のピボット

$$
\begin{array}{c|c|ccc}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & x_1 & x_7 & x_3 \\
\cline{2-5}
z & -\frac{40}{3} & 2 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\
\cline{2-5}
x_4 & \frac{2}{3} & -2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
x_5 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\
x_6 & \frac{11}{3} & -3 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\
x_2 & \frac{8}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\
\cline{2-5}
\end{array}
$$

$(2,3)$ のピボット

$$
\begin{array}{c|c|ccc}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & x_1 & x_7 & x_5 \\
\cline{2-5}
z & -\frac{55}{4} & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\
\cline{2-5}
x_4 & \frac{7}{8} & -\frac{15}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\
x_3 & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\
x_6 & \frac{21}{8} & -\frac{29}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\
x_2 & \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\
\cline{2-5}
\end{array}
$$

以上より、元の問題の最適解は $x = (0, \frac{9}{4}, \frac{5}{8})$ で、最適値は $\frac{55}{4}$ と分かる。

※ 標準形に変換した問題ではなく、元の問題に戻って最適解を示している。標準形に変換する際に目的関数の正負を反転させたので、最適値も正負を反転させる必要があることに注意。

p.15, p.17, p.21 練習問題

資料の続きのページを参照。