

大規模知識処理特論 (第3回)

最適化技法 (1)



北海道大学 情報科学研究院
堀山 貴史

数理計画 と 最適化

数理計画モデル



- 最適な解を求める
- 何を最適化するの？
- どんな評価のもとで最適化するの？

生産計画問題

- 2種類の原料 A, B から、2種類の製品 1, 2 を生産
最大の利益をあげるには？
 - 製品 1 単位当たりの原料使用量
および原料使用可能量

	製品 1 (千 kg)	製品 2 (千 kg)	最大使用可能量 (千 kg)
原料 A	2	2	4
原料 B	3	6	8

- 製品 1 単位当たりの利益
 - 製品 1: 4万円
 - 製品 2: 5万円

生産計画問題の定式化

- 数学モデルとして表す
- 各製品の生産量を x_1, x_2 とする
- 目的： 利益を最大にしたい
 - 最大化 $4x_1 + 5x_2$
- 条件： 使用する原料は、利用可能量以下
 - 原料 A: $2x_1 + 2x_2 \leq 4$
 - 原料 B: $3x_1 + 6x_2 \leq 8$
- 条件： 各製品の生産量は、非負 (0 以上)
 - 製品 1: $x_1 \geq 0$
 - 製品 2: $x_2 \geq 0$

生産計画問題の定式化

- 各製品の生産量を x_1, x_2 とする ← 決定変数、**変数**
- maximize $4x_1 + 5x_2$ ← **目的関数**
- subject to $2x_1 + 2x_2 \leq 4$ ← **制約条件**
 $3x_1 + 6x_2 \leq 8$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- **線形計画問題** (linear programming problem)
 - 目的関数が、**一次関数**
 - 目的は、最大化 または 最小化
 - 制約条件が、すべて**一次**の不等式 or 等号

生産計画問題

- もし、各製品の生産量が**整数**なら...

- maximize $4x_1 + 5x_2$

- subject to $2x_1 + 2x_2 \leq 4$

- $3x_1 + 6x_2 \leq 8$

- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2$ は整数

- **整数計画問題** (integer programming problem)
 - 変数の取る値が整数
 - 0-1 整数計画問題 … 変数の取る値が 0 or 1
 - 混合整数計画問題 … 一部の変数は整数、残りの変数は実数

練習問題： 生産計画問題の定式化

- 4種類の原料 A, B, C, D から、
3種類の製品 1, 2, 3 を生産
最大の利益をあげるには？

- 製品 1 単位当たりの原料使用量、原料使用可能量

	製品 1 (千 kg)	製品 2 (千 kg)	製品 3 (千 kg)	最大使用可能量 (千 kg)
原料 A	4	2	1	6
原料 B	1	2	4	7
原料 C	5	2	3	9
原料 D	3	3	2	8

- 製品 1 単位当たりの利益

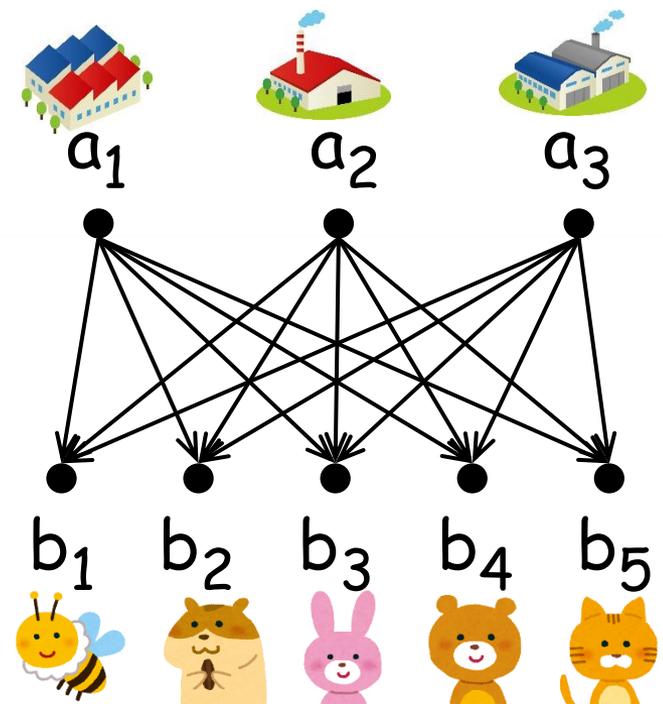
- 製品 1: 3万円、製品 2: 5万円、製品 3: 4万円

練習問題： 生産計画問題の定式化

- m 種類の原料 S_1, S_2, \dots, S_m から、
 n 種類の製品 P_1, P_2, \dots, P_n を生産
最大の利益をあげるには？
 - 製品 P_i を 1 単位生産するのに必要な原料 S_j の使用量を c_{ij} とする
 - 原料 S_j の最大使用可能量を b_j とする
 - 製品 P_i の 1 単位当たりの利益を a_i とする

輸送問題

- 3つの工場 1, 2, 3 から
5つの消費地 1, 2, 3, 4, 5 へ、
製品を輸送する
- 輸送費用を最小にしたい



- 工場 i が1ヶ月に出荷できる量: a_i
- 消費地 j での1ヶ月当たりの需要: b_j
- 工場 i から消費地 j への輸送費用:

製品 1 単位当たり c_{ij}

輸送問題の定式化

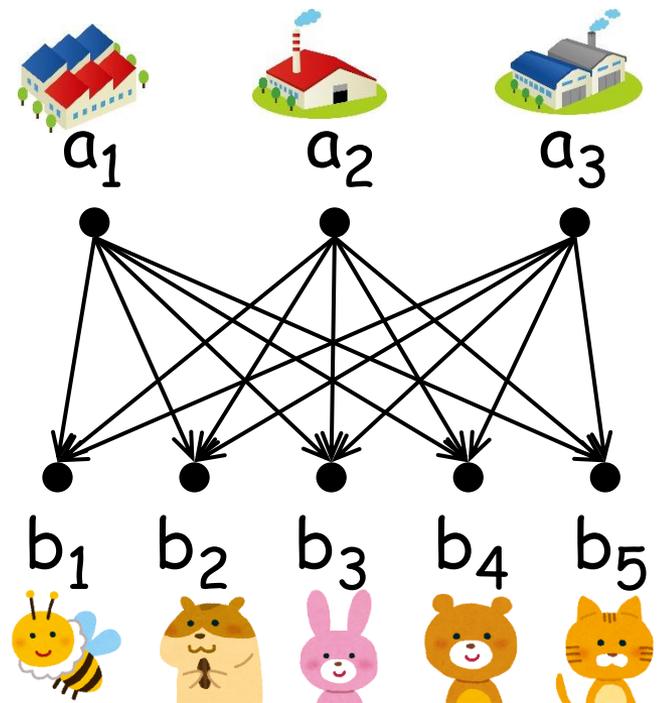
- 工場 i から消費地 j へ輸送する製品の量を x_{ij} とする

- minimize
$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

subject to
$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 5)$$

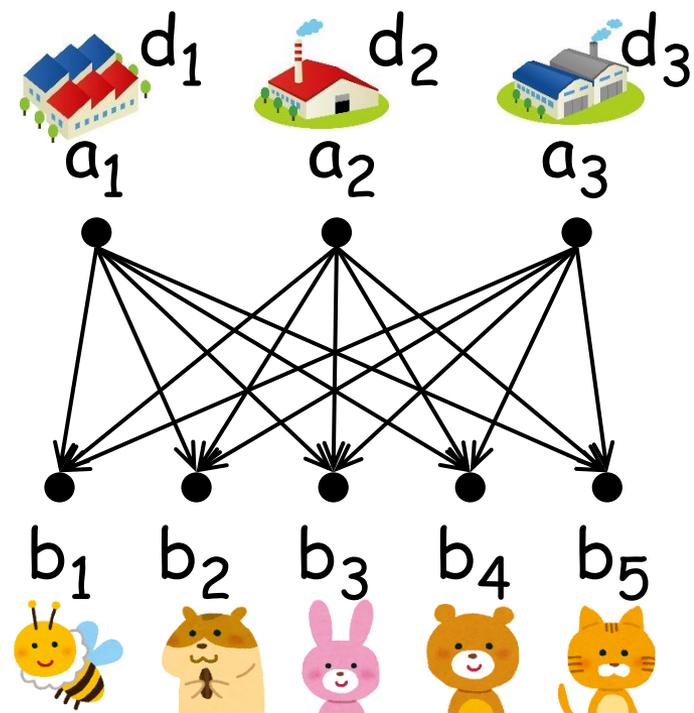


工場 i の
出荷量

消費地 j の
消費量

施設配置問題

- p. 9 の問題で、
工場 i の稼働には、
1ヶ月当たり経費が d_i がかかる
(工場 i を使わない場合は、
その工場の経費は 0)
- 輸送費用と工場経費の総和を
最小にしたい



施設配置問題の定式化

- 工場 i から消費地 j へ輸送する製品の量を x_{ij} 、工場 i を稼働させるかどうかを y_i とする
($y_i = 1 \cdots$ 稼働させる、 $y_i = 0 \cdots$ 稼働させない)

- minimize
$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^3 d_i y_i$$

工場 i の
出荷量

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq a_i y_i$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq a_i & \text{工場 } i \text{ 稼働させる } (y_i = 1) \\ \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 0 & \text{工場 } i \text{ 稼働させない } (y_i = 0) \end{array} \right.$$

施設配置問題の定式化

- 工場 i から消費地 j へ輸送する製品の量を x_{ij} 、工場 i を稼働させるかどうかを y_i とする
($y_i = 1 \cdots$ 稼働させる、 $y_i = 0 \cdots$ 稼働させない)

- minimize
$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^3 d_i y_i$$

subject to
$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq a_i y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

工場 i の
出荷量

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$

消費地 j の
消費量

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 5)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

線形計画法



- 線形計画問題を、どうやって解くの？

練習問題： 図示して解く

■ 最適解は？

$(x_1, x_2) =$

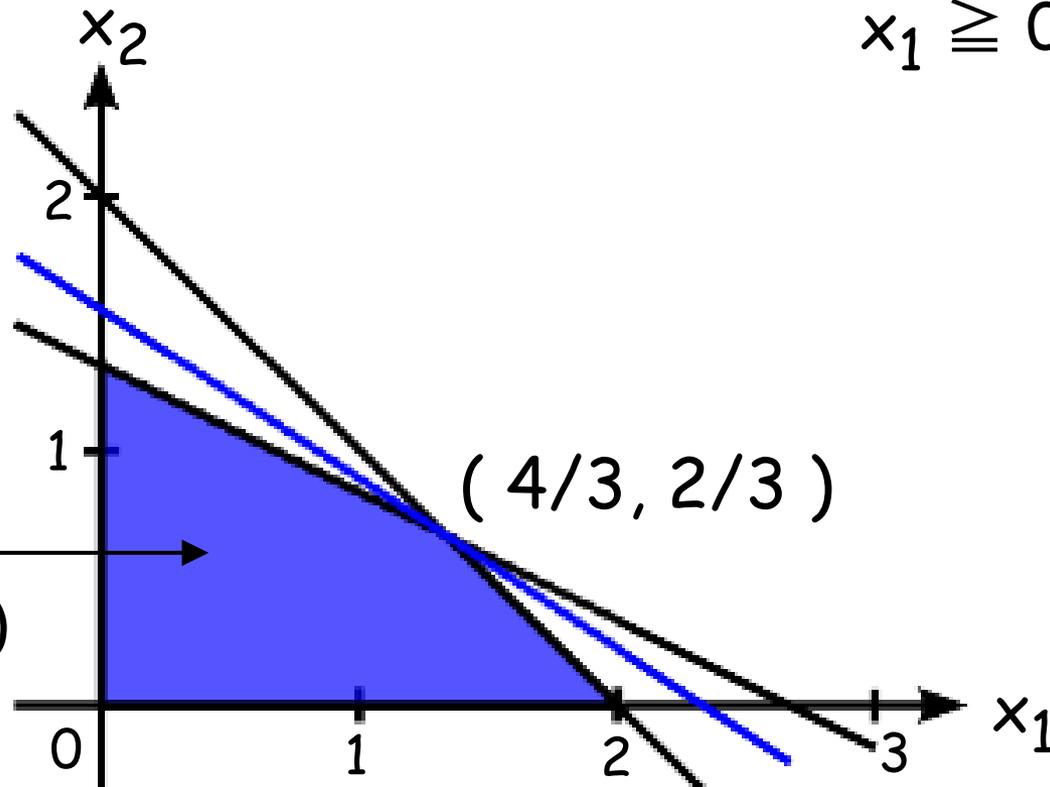
■ 最適値は？

■ maximize $4x_1 + 5x_2$

subject to $2x_1 + 2x_2 \leq 4$

$3x_1 + 6x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



制約領域、
実行可能領域
(feasible region)

練習問題： 図示して解く (整数計画問題は...)

■ 最適解は？

$(x_1, x_2) =$

■ 最適値は？

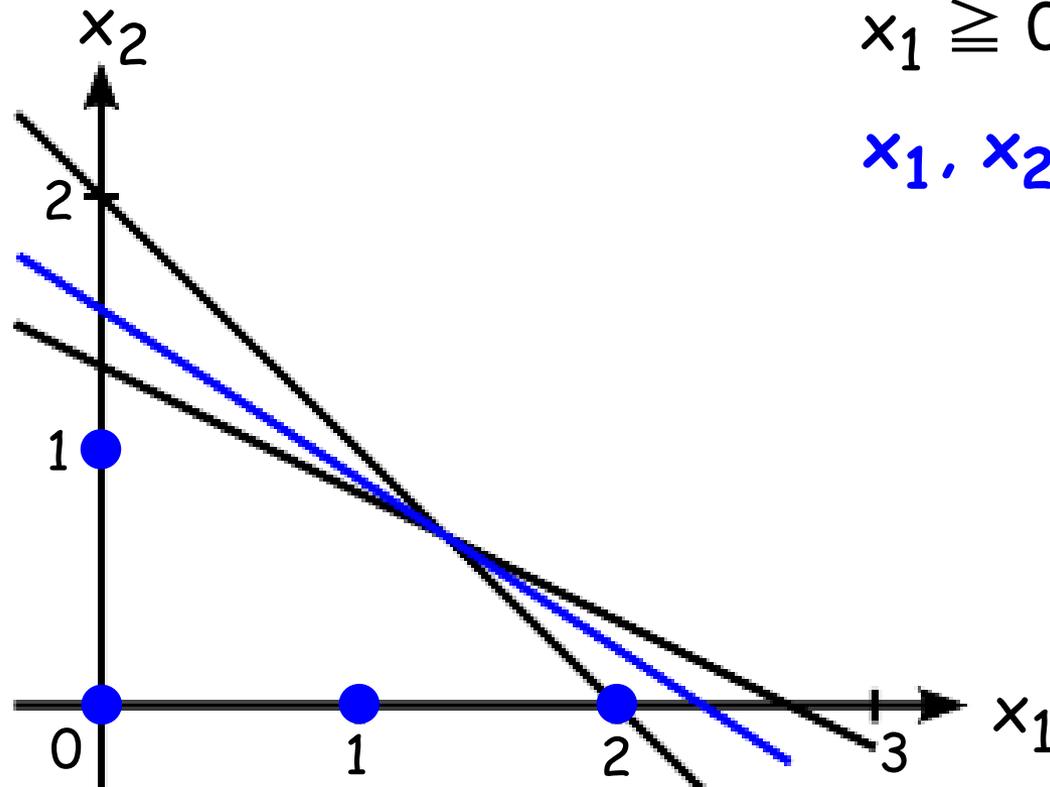
■ maximize $4x_1 + 5x_2$

subject to $2x_1 + 2x_2 \leq 4$

$3x_1 + 6x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

x_1, x_2 は整数



実行可能集合
(feasible set)

練習問題： 図示して解く

(a) maximize $4x_1 + 5x_2$
subject to $2x_1 + 2x_2 \leq 4$
 $3x_1 + 6x_2 \leq 8$
 $x_1 + 4x_2 \leq 4$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(b) 問(a)の maximize
を minimize に変更

(c) maximize $4x_1 + 2x_2$
subject to $x_1 + x_2 \leq 8$
 $x_1 \leq 6$
 $x_1 + 2x_2 \geq 2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(d) 問(c)の maximize
を minimize に変更

発展問題： 図示して解く (できれば挑戦してください)

- slide 7 の線形計画問題を解きなさい
 - **3次元空間**
 - $4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$ … 平面で切った半分の領域
- 3次元以上の線形計画問題を図示して解くのは、非常に困難である

線形計画法 標準形



標準形

- すべての線形計画問題は、**標準形** (standard form) に書き直すことができる

- **minimize**
$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

subject to
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ただし、 **$b_i \geq 0$** (※ 忘れやすいので注意)

標準形への変形の例

- maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$
subject to $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$: 自由変数

- maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$
- minimize $z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

符号の反転

標準形への変形の例 (つづき)

- maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$
subject to $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$: 自由変数

- $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$
- $2x_1 + x_2 - 3x_3 + s_1 = 4, s_1 \geq 0$

スラック変数
(余裕変数) の導入

標準形への変形の例 (つづき)

■ maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$
subject to $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$: 自由変数

どちらも**スラック変数**と呼ぶことが多い

■ $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$
■ $2x_1 + x_2 - 3x_3 + s_1 = 4, s_1 \geq 0$

スラック変数
(余裕変数)の導入

■ $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$
■ $x_1 - x_2 + 4x_3 - s_2 = 5, s_2 \geq 0$

サープラス変数
(過剰変数)の導入

標準形への変形の例 (つづき)

■ maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$
 subject to $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$: 自由変数

どちらも**スラック変数**と呼ぶことが多い

■ $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$

■ $2x_1 + x_2 - 3x_3 + s_1 = 4, s_1 \geq 0$

スラック変数
(余裕変数)の導入

■ $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$

■ $x_1 - x_2 + 4x_3 - s_2 = 5, s_2 \geq 0$

サープラス変数
(過剰変数)の導入

■ $2x_1 + x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + s_1 = 4$

非負変数の導入

■ $x_1 - x_2 + 4x_3' - 4x_3'' - s_2 = 5, x_3', x_3'' \geq 0$

標準形への変形の例 (つづき)

■ maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$
subject to $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$: 自由変数

■ minimize $z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3' - 4x_3''$
subject to $2x_1 + x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + s_1 = 4$
 $x_1 - x_2 + 4x_3' - 4x_3'' - s_2 = 5$
 $x_1, x_2, x_3', x_3'', s_1, s_2 \geq 0$

練習問題： 標準形への変形

(a) maximize $z = 4x_1 + 2x_2$
subject to $2x_1 + 2x_2 \leq 4$
 $-3x_1 - 6x_2 \leq -9$
 $x_1 \geq 0, x_2$: 自由変数

(b) maximize $z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$
subject to $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$
 $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leq -2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3$: 自由変数

まとめ

- 問題の定式化
 - **線形計画問題**
 - **整数計画問題**
- 線形計画問題の解法
 - 図示して解く
 - 3変数以上の線形計画問題を
図示して解くのは、非常に困難
- 線形計画問題の**標準形**
 - すべての線形計画問題は、
標準形に書き直すことができる