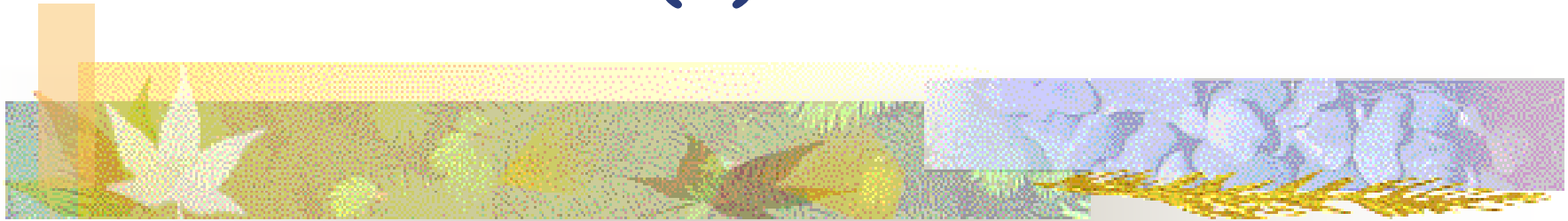


# 大規模知識処理特論 (第3回)

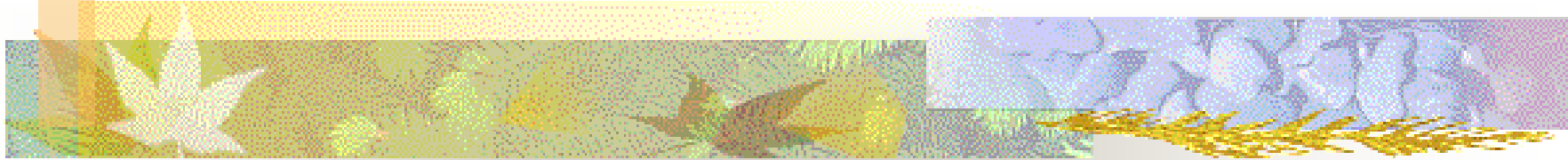
## 最適化技法 (1)



北海道大学 情報科学研究院  
堀山 貴史

# 数理計画 と 最適化

## 数理計画モデル



- 最適な解を求める
- 何を最適化するの？
- どんな評価のもとで最適化するの？

# 生産計画問題

- 2種類の原料 A, B から、2種類の製品 1, 2 を生産  
最大の利益をあげるには？
  - 製品 1 単位当たりの原料使用量  
および原料使用可能量

	製品 1 (千 kg)	製品 2 (千 kg)	最大使用可能量 (千 kg)
原料 A	2	2	4
原料 B	3	6	8

- 製品 1 単位当たりの利益
  - 製品 1: 4万円
  - 製品 2: 5万円

# 生産計画問題の定式化

- 数学モデルとして表す
- 各製品の生産量を  $x_1, x_2$  とする
- 目的： 利益を最大にしたい
  - 最大化  $4x_1 + 5x_2$
- 条件： 使用する原料は、利用可能量以下
  - 原料 A:  $2x_1 + 2x_2 \leq 4$
  - 原料 B:  $3x_1 + 6x_2 \leq 8$
- 条件： 各製品の生産量は、非負 (0 以上)
  - 製品 1:  $x_1 \geq 0$
  - 製品 2:  $x_2 \geq 0$

# 生産計画問題の定式化

- 各製品の生産量を  $x_1, x_2$  とする ← 決定変数、**変数**
- maximize  $4x_1 + 5x_2$  ← **目的関数**
- subject to  $2x_1 + 2x_2 \leq 4$  ← **制約条件**  
 $3x_1 + 6x_2 \leq 8$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- **線形計画問題** (linear programming problem)
  - 目的関数が、**一次関数**
    - 目的は、最大化 または 最小化
  - 制約条件が、すべて**一次**の不等式 or 等号

# 生産計画問題

- もし、各製品の生産量が**整数**なら...

- maximize  $4x_1 + 5x_2$

subject to  $2x_1 + 2x_2 \leq 4$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \text{ は整数}$$

- **整数計画問題** (integer programming problem)
  - 変数の取る値が整数
  - 0-1 整数計画問題 … 変数の取る値が 0 or 1
  - 混合整数計画問題 … 一部の変数は整数、残りの変数は実数

# 練習問題： 生産計画問題の定式化

- 4種類の原料 A, B, C, D から、  
3種類の製品 1, 2, 3 を生産  
最大の利益をあげるには？

- 製品 1 単位当たりの原料使用量、原料使用可能量

	製品 1 (千 kg)	製品 2 (千 kg)	製品 3 (千 kg)	最大使用可能量 (千 kg)
原料 A	4	2	1	6
原料 B	1	2	4	7
原料 C	5	2	3	9
原料 D	3	3	2	8

- 製品 1 単位当たりの利益
  - 製品 1: 3万円、製品 2: 5万円、製品 3: 4万円

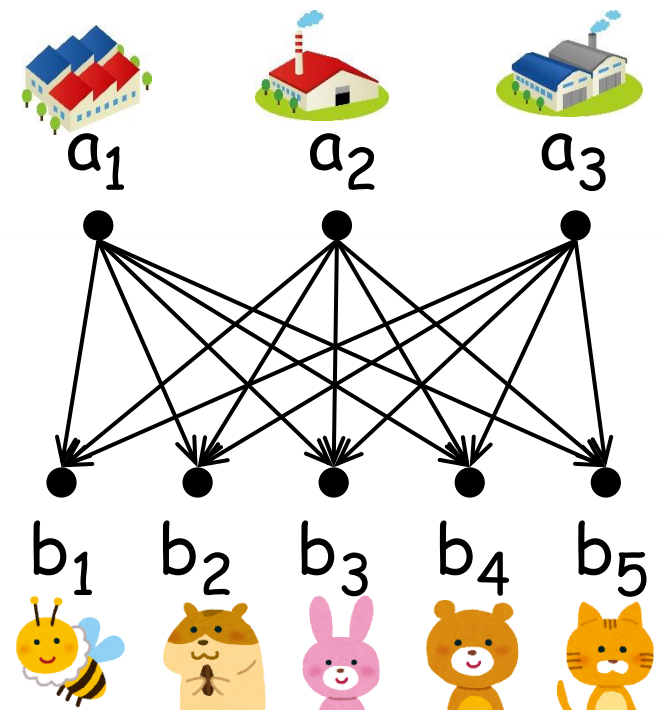
## 練習問題： 生産計画問題の定式化

- $m$  種類の原料  $S_1, S_2, \dots, S_m$  から、  
 $n$  種類の製品  $P_1, P_2, \dots, P_n$  を生産  
最大の利益をあげるには？
  - 製品  $P_i$  を 1 単位生産するのに必要な原料  $S_j$  の使用量を  $c_{ij}$  とする
  - 原料  $S_j$  の最大使用可能量を  $b_j$  とする
  - 製品  $P_i$  の 1 単位当たりの利益を  $a_i$  とする



# 輸送問題

- 3つの工場 1, 2, 3 から  
5つの消費地 1, 2, 3, 4, 5 へ、  
製品を輸送する
- 輸送費用を最小にしたい



- 工場  $i$  が1ヶ月に出荷できる量:  $a_i$
- 消費地  $j$  での1ヶ月当たりの需要:  $b_j$
- 工場  $i$  から消費地  $j$  への輸送費用:

製品 1 単位当たり  $c_{ij}$

# 輸送問題の定式化

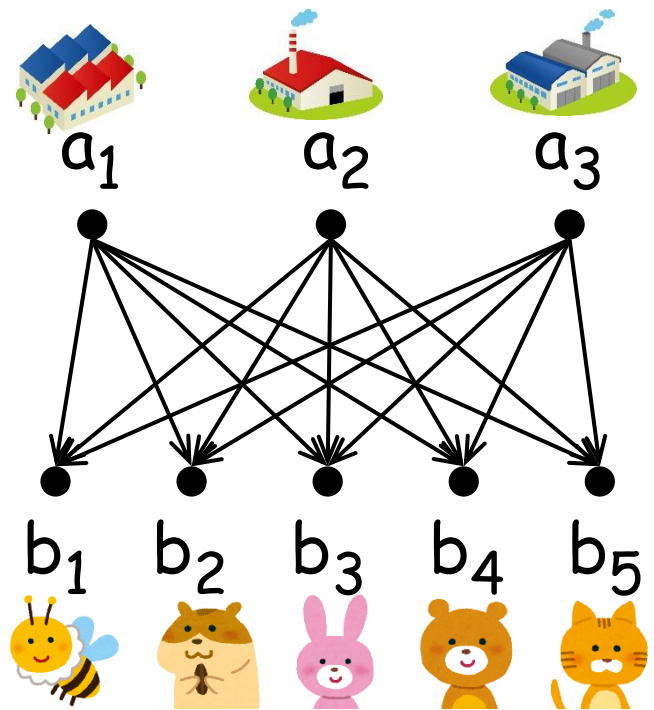
- 工場  $i$  から消費地  $j$  へ輸送する製品の量を  $x_{ij}$  とする

- minimize 
$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

subject to 
$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 5)$$

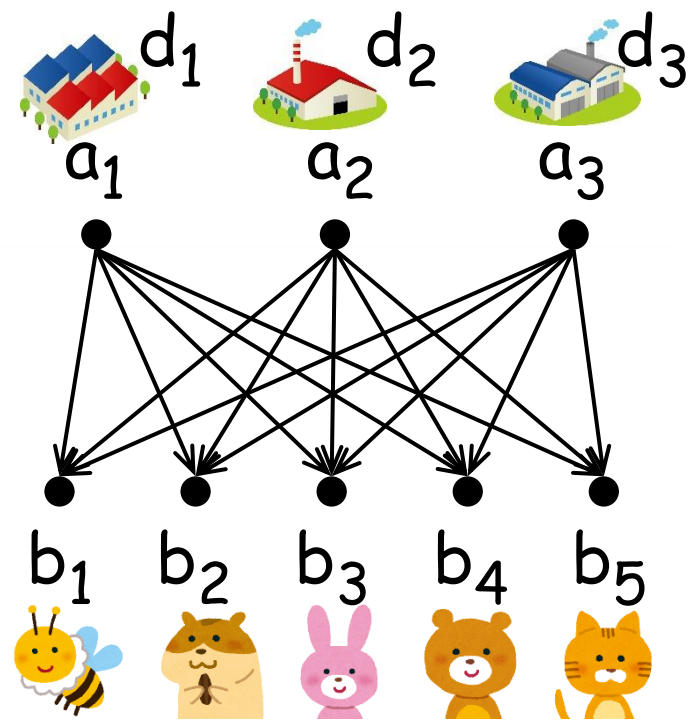


工場  $i$  の  
出荷量

消費地  $j$  の  
消費量

# 施設配置問題

- p. 9 の問題で、  
工場  $i$  の稼働には、  
1ヶ月当たり経費が  $d_i$  がかかる  
(工場  $i$  を使わない場合は、  
その工場の経費は 0)
- 輸送費用と工場経費の総和を  
最小にしたい



# 施設配置問題の定式化

- 工場  $i$  から消費地  $j$  へ輸送する製品の量を  $x_{ij}$ 、工場  $i$  を稼働させるかどうかを  $y_i$  とする  
( $y_i = 1 \cdots$  稼働させる、 $y_i = 0 \cdots$  稼働させない)

- minimize 
$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^3 d_i y_i$$

工場  $i$  の  
出荷量

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq a_i y_i$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq a_i & \text{工場 } i \text{ 稼働させる } (y_i = 1) \\ \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 0 & \text{工場 } i \text{ 稼働させない } (y_i = 0) \end{array} \right.$$

# 施設配置問題の定式化

- 工場  $i$  から消費地  $j$  へ輸送する製品の量を  $x_{ij}$ 、工場  $i$  を稼働させるかどうかを  $y_i$  とする  
( $y_i = 1 \cdots$  稼働させる、 $y_i = 0 \cdots$  稼働させない)

- minimize 
$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^3 d_i y_i$$

subject to 
$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq a_i y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

工場  $i$  の  
出荷量

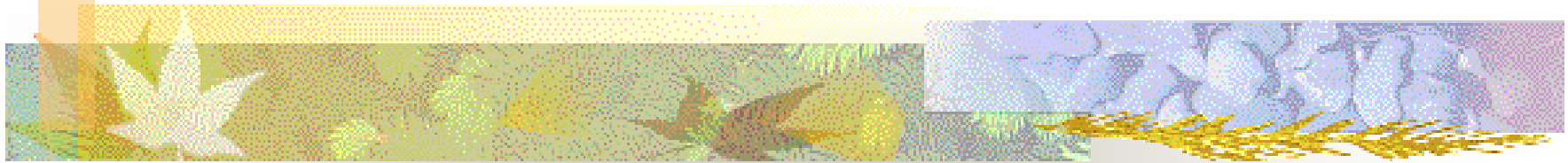
$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$

消費地  $j$  の  
消費量

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 5)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

# 線形計画法



- 線形計画問題を、どうやって解くの？

# 練習問題： 図示して解く

■ 最適解は？

$(x_1, x_2) =$

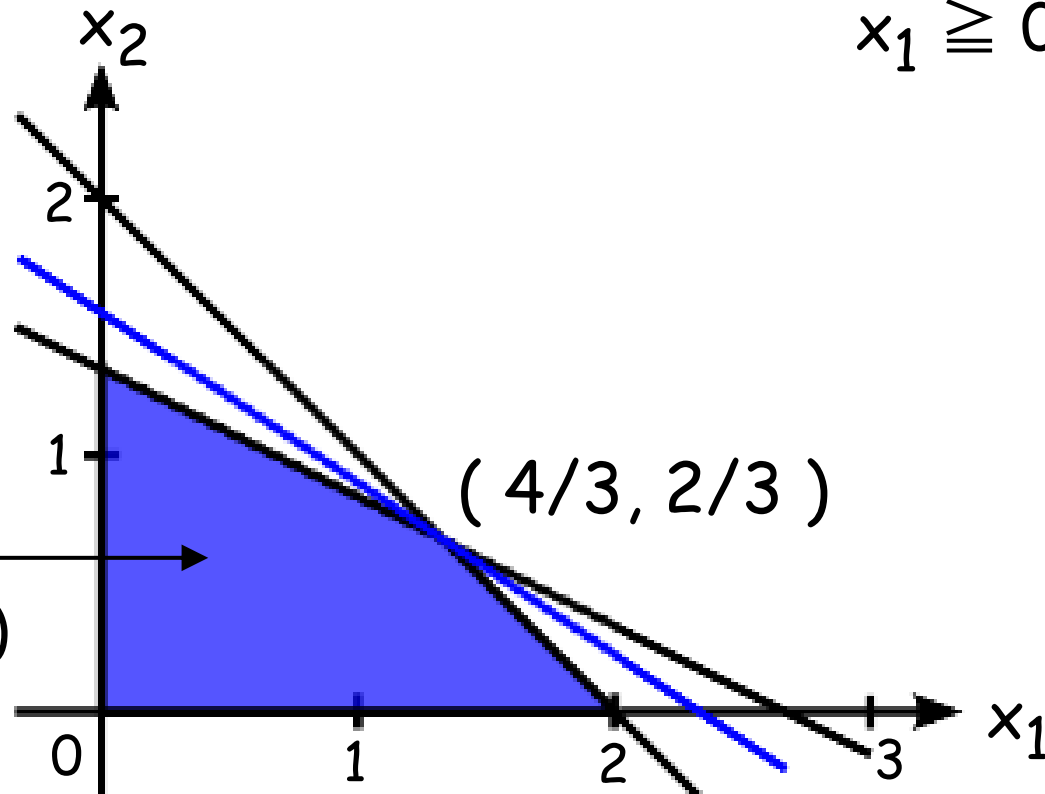
■ 最適値は？

■ maximize  $4x_1 + 5x_2$

subject to  $2x_1 + 2x_2 \leq 4$

$3x_1 + 6x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



制約領域、  
実行可能領域  
(feasible region)

# 練習問題： 図示して解く (整数計画問題は...)

■ 最適解は？

$(x_1, x_2) =$

■ 最適値は？

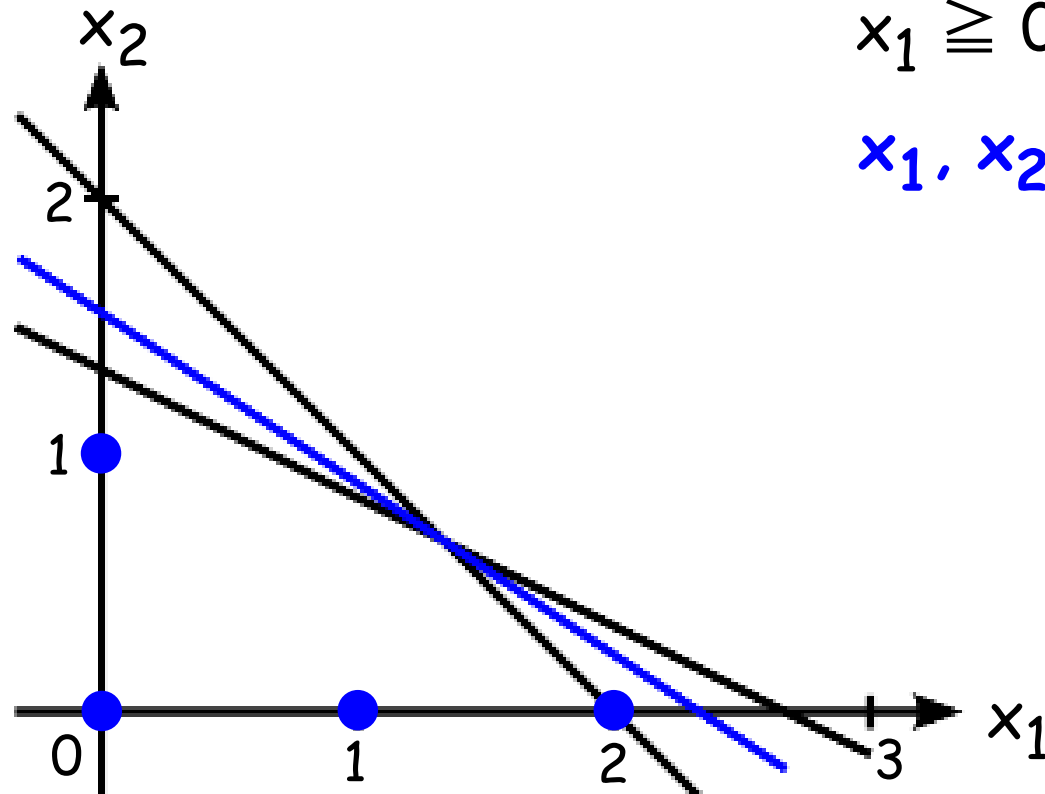
■ maximize  $4x_1 + 5x_2$

subject to  $2x_1 + 2x_2 \leq 4$

$3x_1 + 6x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$x_1, x_2$  は整数



実行可能集合  
(feasible set)



## 練習問題： 図示して解く

(a) maximize  $4x_1 + 5x_2$   
subject to  $2x_1 + 2x_2 \leq 4$   
 $3x_1 + 6x_2 \leq 8$   
 $x_1 + 4x_2 \leq 4$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(b) 問(a)の maximize  
を minimize に変更

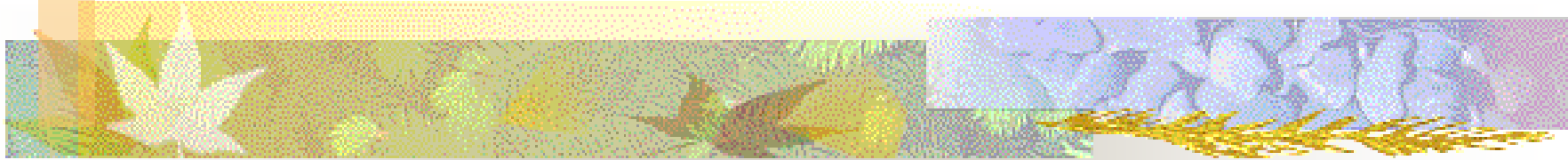
(c) maximize  $4x_1 + 2x_2$   
subject to  $x_1 + x_2 \leq 8$   
 $x_1 \leq 6$   
 $x_1 + 2x_2 \geq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(d) 問(c)の maximize  
を minimize に変更

## 発展問題： 図示して解く (できれば挑戦してください)

- slide 7 の線形計画問題を解きなさい
  - **3次元空間**
  - $4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$  … 平面で切った半分の領域
- 3次元以上の線形計画問題を図示して解くのは、非常に困難である

# 線形計画法 標準形



# 標準形

- すべての線形計画問題は、**標準形** (standard form) に書き直すことができる

- **minimize** 
$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

subject to 
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ただし、 **$b_i \geq 0$**  (※ 忘れやすいので注意)

# 標準形への変形の例

- maximize  $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$   
subject to  $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$   
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$   
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$ : 自由変数

- maximize  $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$
- minimize  $z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

符号の反転

# 標準形への変形の例 (つづき)

- maximize  $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$   
subject to  $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$   
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$   
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$ : 自由変数

- $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$
- $2x_1 + x_2 - 3x_3 + s_1 = 4, s_1 \geq 0$

**スラック変数**  
(余裕変数) の導入

# 標準形への変形の例 (つづき)

■ maximize  $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$   
subject to  $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$   
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$   
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$ : 自由変数

どちらも**スラック変数**と呼ぶことが多い

■  $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$   
■  $2x_1 + x_2 - 3x_3 + s_1 = 4, s_1 \geq 0$

**スラック変数**  
(余裕変数)の導入

■  $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$   
■  $x_1 - x_2 + 4x_3 - s_2 = 5, s_2 \geq 0$

**サープラス変数**  
(過剰変数)の導入

# 標準形への変形の例 (つづき)

■ maximize  $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$   
 subject to  $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$   
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$   
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$ : 自由変数

どちらも**スラック変数**と呼ぶことが多い

■  $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$

■  $2x_1 + x_2 - 3x_3 + s_1 = 4, s_1 \geq 0$

**スラック変数**  
(余裕変数)の導入

■  $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$

■  $x_1 - x_2 + 4x_3 - s_2 = 5, s_2 \geq 0$

**サープラス変数**  
(過剰変数)の導入

■  $2x_1 + x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + s_1 = 4$

非負変数の導入

■  $x_1 - x_2 + 4x_3' - 4x_3'' - s_2 = 5, x_3', x_3'' \geq 0$



# 標準形への変形の例 (つづき)

■ maximize  $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$   
subject to  $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4$   
 $x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5$   
 $x_1, x_2 \geq 0, x_3$ : 自由変数

■ minimize  $z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3' - 4x_3''$   
subject to  $2x_1 + x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + s_1 = 4$   
 $x_1 - x_2 + 4x_3' - 4x_3'' - s_2 = 5$   
 $x_1, x_2, x_3', x_3'', s_1, s_2 \geq 0$

## 練習問題： 標準形への変形

(a) maximize  $z = 4x_1 + 2x_2$   
subject to  $2x_1 + 2x_2 \leq 4$   
 $-3x_1 - 6x_2 \leq -9$   
 $x_1 \geq 0, x_2$ : 自由変数

(b) maximize  $z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$   
subject to  $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$   
 $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leq -2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3$ : 自由変数

# まとめ

- 問題の定式化
  - **線形計画問題**
  - **整数計画問題**
- 線形計画問題の解法
  - 図示して解く
  - 3変数以上の線形計画問題を図示して解くのは、非常に困難
- 線形計画問題の**標準形**
  - すべての線形計画問題は、標準形に書き直すことができる