大規模知識処理特論 (第6回)
最適化技法 (3)

補足資料： 二段階法

北海道大学 情報科学研究院
堀山 貴史

二段階法

- もとの問題を解くと…
  - **実行不能** (実行可能解を持たない)
  - **非有界**
  - **最適解**を持つ
- フェーズ I
  - **人工的な線形計画問題**を作って、単体法で解く
  - もとの問題が**実行可能か、実行不能か**を判定
  - 実行可能なら、もとの問題の実行可能基底解を求める
- フェーズ II
  - フェーズ I の実行可能解を**初期解**として、
    もとの問題を単体法で解く (最適解が得られる)

二段階法（フェーズ I）（例）

- もとの問題（標準形）

$$
\begin{aligned}
&\text{mimimize} \quad z = -x_1 - 5x_2 \\
&\text{subject to} \quad 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\
&\qquad\qquad\qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\
&\qquad\qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geqq 0
\end{aligned}
$$

初期実行可能基底解 ???

- 人工問題

$$
\begin{aligned}
&\text{mimimize} \quad w = x_4 + x_5 \\
&\text{subject to} \quad 4x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\
&\qquad\qquad\qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\
&\qquad\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0
\end{aligned}
$$

制約式1つに**人工変数**1つ

人工変数の和を最小化

(人工変数を**全部 0** にしたい)

初期実行可能基底解

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 6, 4)$

単体法を適用

人工問題の最適解 $(0, 2/5, 8/5, 0, 0)$ 人工問題の最適解が、もとの問題の制約を満たす

二段階法（フェーズ I）

- minimize $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

  subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

  $x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

人工問題

- minimize $w = \sum_{i=1}^{m} \boxed{x_{n+i}}$

  subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \boxed{x_{n+i}} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

  $x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n+m)$

制約式１つに人工変数１つ

人工変数の和を最小化

必ず実行可能基底解を持つ

$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = (0, 0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$

二段階法 (フェーズ I)

- 人工問題の最適値 w*
- **Case 1**: w* > 0　(つまり、人工変数を 0 にできない)
  - もとの問題が**実行不能**

人工変数は、すべて非基底変数

- **Case 2**: w* = 0, 基底変数に人工変数を含まない
  - フェーズ I の基底解が、
もとの問題の**実行可能基底解**に対応
→ フェーズ II の初期解を見つけた
- Case 3: w* = 0, 基底変数に人工変数を含む
  - フェーズ I 終了時の辞書を見る

二段階法（フェーズ II）（例）

- もとの問題（標準形）

$$\begin{array}{ll} \text{mimimize} & z = -x_1 - 5x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \end{array}$$

初期実行可能基底解

		x_1
z	-2	-3
x_3	8/5	-9/10
x_2	2/5	2/5

- 人工問題

$$\begin{array}{ll} \text{mimimize} & w = x_4 + x_5 \\ \text{subject to} & 4x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0 \end{array}$$

・人工変数を取り除く
・z を求める

人工問題の最適解

		x_1	x_5	x_4
w	0	0	1	1
x_3	8/5	-9/10	-1/10	-1/5
x_2	2/5	2/5	-2/5	1/5

まず、Case 1, 2 を理解してください

二段階法（フェーズ I, Case 3）（例）

$$
\begin{array}{llrrrrrl}
\text{mimimize} & w = & & & & x_4 & + x_5 & \\
\text{subject to} & & & - x_2 & - 2x_3 & + x_4 & & = 0 \\
 & & x_1 & + 3x_2 & + 4x_3 & & + x_5 & = 5 \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0} &
\end{array}
$$

人工問題の最適解

		x_2	x_3	x_5
w	0	1	2	1
x_4	0	1	2	0
x_1	5	-3	-4	-1

人工変数 x_4 が基底変数なのがイヤ

- もとの問題の変数を、基底変数にする

例） x_4 と x_2 を交換

$$x_4 = 0 + x_2 + 2x_3$$

$$x_2 = 0 + x_4 - 2x_3$$

		x_4	x_3	x_5
w	0	1	0	1
x_2	0	1	-2	0
x_1	5	-3	2	-1

まず、Case 1, 2 を理解してください

二段階法 (フェーズ I, Case 3)

- 最適辞書を見る　人工変数が基底変数になっているのがイヤ
  - 人工変数：　$x_i = b_i + a_{i,j_1} x_{j_1} + a_{i,j_2} x_{j_2} + \dots + a_{i,j_n} x_{j_n}$
- Case 3-1:　もとの問題の変数を、基底変数にする
  - もとの問題のある変数 x_{j_k} で $a_{i,j_k} \neq 0$
  - x_i と x_{j_k} についてピボット
    - $x_{j_k} = b_i / a_{i,j_k} + a_{i,j_1} / a_{i,j_k} x_{j_1} + \dots$
- Case 3-2:　人工変数が人工変数のみで表せる
  - もとの問題のすべての変数 x_{j_k} で $a_{i,j_k} = 0$
  - x_i は、人工変数のみに依存 → x_i の式を**省いて ok**

・仮定2 (行列 A のランクは m) が成立しない場合は、Case 3-2 により制約式が省ける
・仮定 1 ($n \geq m$) が成立しない場合 ($n < m$) は、rank(A) < m → 少なくとも m − n 個の制約式が Case 3-2 により省ける

練習問題: 二段階法

a. 第6回資料 p. 10 の問題を標準化した以下の問題を二段階法で解きなさい (まず、人工変数 x_4 を導入)

$$
\begin{array}{ll}
\text{mimimize} & z = -x_1 - 2x_2 \\
\text{subject to} & -x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geqq 0
\end{array}
$$

練習問題:

- 以下の問題を標準化して、二段階法で解きなさい
  - b. p. 9 の問題
  - c. p. 11 の問題

練習問題:　二段階法

(a)　以下の問題を二段階法で解きなさい
(まず、人工変数を導入)

$$
\begin{array}{ll}
\text{mimimize} \;\; z = & -x_1 - 2x_2 \\
\text{subject to} & -x_1 - x_2 = 2 \\
 & -2x_1 - x_2 = 8 \\
 & x_1, x_2 \geqq 0
\end{array}
$$

(b)　以下の問題を標準化して、二段階法で解きなさい

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} \;\; z = & -3x_1 - x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \leqq 4 \\
 & x_1 + 2x_2 = 5 \\
 & x_1, x_2 \geqq 0
\end{array}
$$

練習問題: 二段階法

- 以下の問題を標準化して、二段階法で解きなさい

(a)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} \ z = & x_1 + 4x_2 \\
\text{subject to} & 2x_1 + x_2 \leqq 8 \\
& x_1 + 2x_2 \leqq 10 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} \ z = & x_1 + 4x_2 \\
\text{subject to} & 2x_1 + x_2 \geqq 8 \\
& x_1 + 2x_2 \geqq 10 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{array}
$$

p. 10 (b) の問題

まとめ

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = -3x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leqq 4 \\ & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{array}$$

↓ **標準形**への変形

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \end{array}$$

↓ 二段階法 Step 1: **人工問題**

$$\begin{array}{ll} \text{miniimize} & w = x_4 + x_5 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0 \end{array}$$

		x_1	x_2	x_3
w	9	-2	-3	-1
x_4	4	-1	-1	-1
x_5	5	-1	-2	0

↓ **人工問題**を単体法で解く

		x_1	x_5	x_4
w	$\boxed{0}$	0	1	1
x_3	3/2	-1/2	1/2	-1
x_2	5/2	-1/2	-1/2	0

人工変数をすべて0にできる

↓ Step 2: 標準形の初期実行可能解

		x_1
z	5/2	5/2
x_3	3/2	-1/2
x_2	5/2	-1/2