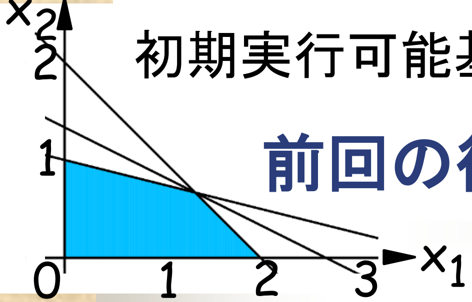
大規模知識処理特論 (第6回)
最適化技法 (3)

北海道大学 情報科学研究院
堀山 貴史



初期実行可能基底解から、実行可能領域（凸多面体）の端点を辿る

前回の復習 +α： 単体法（シンプレックス法）

mimimize $z = -4x_1 - 5x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 4 \\
3x_1 + 6x_2 + \quad x_4 \quad &= 8 \\
x_1 + 4x_2 + \quad\quad x_5 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

初期実行可能基底解

		x_1	x_2
z	0	- 4	- 5
x_3	4	- 2	- 2
x_4	8	- 3	- 6
x_5	4	- 1	- 4

$$
\begin{aligned}
z &= -4x_1 - 5x_2 \\
x_3 &= -2x_1 - 2x_2 + 4 \\
x_4 &= -3x_1 - 6x_2 + 8 \\
x_5 &= -\ \ x_1 - 4x_2 + 4
\end{aligned}
$$

(3, 2) のピボット

		x_1	x_5
z	-5	-11/4	5/4
x_3	2	- 3/2	1/2
x_4	2	- 3/2	- 3/2
x_2	1	- 1/4	- 1/4

x_2 を 0 から増やすと

(他の非基底変数は $x_1 = 0$ 固定)

x_3 減少，$x_3 \geqq 0$ には $x_2 \leqq 2$

x_4 減少，$x_4 \geqq 0$ 〃 $x_2 \leqq 4/3$

x_5 減少，$x_5 \geqq 0$ 〃 $x_2 \leqq 1$

(1, 1) のピボット

		x_3	x_5
z	-26/3	11/6	1/3
x_1	4/3	- 2/3	1/3
x_4	0	1	1
x_2	2/3	1/6	- 1/3

$$x_2 = -1/4\, x_1 - 1/4\, x_5 + 1$$

最初の 実行可能 基底解は？

- 一般的な見つけ方は、また後で
- 簡単な場合

maximize	$z = 4x_1 + 6x_2$
subject to	$2x_1 + 2x_2 \leqq 4$
	$3x_1 + 6x_2 \leqq 9$
	$x_1, x_2 \geqq 0$

標準形への変形

minimize	$z = -4x_1 - 6x_2$
subject to	$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$
	$3x_1 + 6x_2 + x_4 = 9$
	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0$

- x_3, x_4 を基底変数とする
  - $z = -4x_1 - 6x_2$
  - $x_3 = 4 - 2x_1 - 2x_2$
  - $x_4 = 9 - 3x_1 - 6x_2$

ピボットの選択は？

- 標準的には、相対コスト係数 $c_j < 0$ で、$|c_j|$ が最大の x_j を選択する

補足: ピボット演算 (単体表の更新だけで ok)

		x_1	x_2
z	0	- 4	- 6
x_3	4	- 2	- 2
x_4	9	- 3	- 6

		x_1	x_4
z			
x_3			
x_2	3/2	- 1/2	- 1/6

9 / -(- 6)

1 / (- 6)

例: (2, 2) のピボット

2行目の変数と
2列目の変数の入れ換え

2行目

$$x_4 = b_4 + a_1 x_1 + \underline{a_2 x_2}$$

$$x_2 = b_4/(-a_2) + a_1/(-a_2)\, x_1 + 1/a_2\, x_4$$

2行目を $-a_2$ で割る、2列目だけ $1/a_2$

補足: ピボット演算 (単体表の更新だけで ok)

		x_1	x_2
z	0	- 4	- 6
x_3	4	- 2	- 2
x_4	9	- 3	- 6

		x_1	x_4
z			
x_3			
x_2	3/2	- 1/2	- 1/6

4 + (3/2)(- 2)

		x_1	x_4
z			
x_3	1	- 1	1/3
x_2	3/2	- 1/2	- 1/6

(- 1/6)(- 2)

例: (2, 2) のピボット

2行目の変数と
2列目の変数の入れ換え

2行目以外

$x_3 = b_3 + a_1 x_1 + \underline{a_2 x_2}$

$x_2 = b'_2 + a'_1 x_1 + a'_4 x_4$

⬇

x_2 式を a_2 倍して、x_3 式に足す

(項ごとに足せば、暗算でできる)

2列目だけ、x_2 式の a_2 倍

練習問題:　単体法 (シンプレックス法)

a. 第 5 回資料 p. 24 の線形計画問題を
単体法 (シンプレックス法) で解きなさい

b. 第 5 回資料 p. 13 の線形計画問題を　〃
c. 第 5 回資料 p. 15 の線形計画問題を　〃
d. 第 3 回資料 p. 7 の線形計画問題を　〃

線形計画法
単体法（シンプレックス法）

- これで、どんな線形計画問題でも解けるだろうか？

考慮すべき状況: 実行可能領域が非有界

もとの問題

$$\begin{array}{ll} \text{mimimize} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geqq -1 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{array}$$

初期実行可能基底解

		x_1	x_2
z	0	-1	-2
x_3	1	1	1

標準形

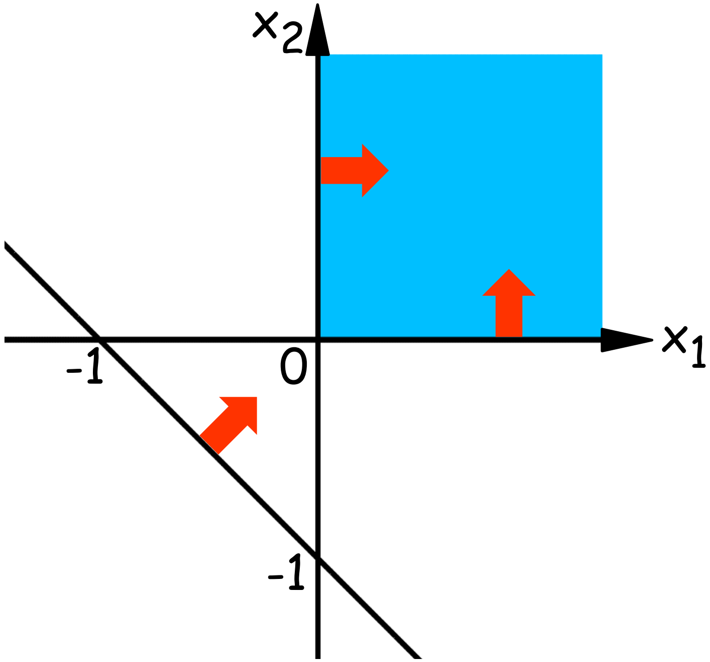
$$\begin{array}{l} -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \end{array}$$

x_2 を 0 から増やすと
(他の非基底変数は $x_1 = 0$ 固定)

x_3 増加, $x_3 \geqq 0$ を満たし続ける

→ 目的関数値 z は減少し続ける

実行可能領域が**非有界**



考慮すべき状況： 実行不能（実行可能解がない）

もとの問題

$$\begin{aligned} &\text{mimimize} \quad z = -x_1 - 2x_2 \\ &\text{subject to} \quad x_1 + x_2 \leqq -1 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

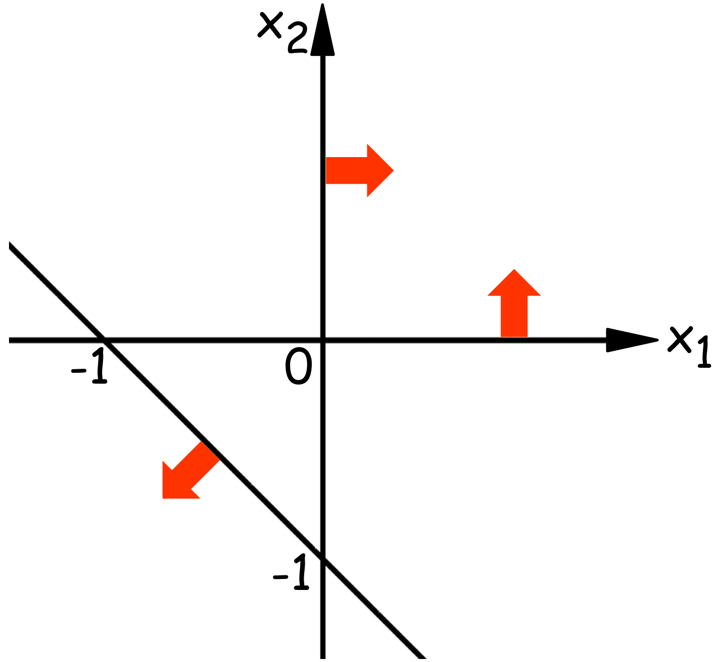
初期実行可能基底解

		x_1	x_2
z	0	-1	-2
x_3	-1	-1	-1

実行可能基底解になっていない

標準形

$$\begin{aligned} &-x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \end{aligned}$$



実行不能と判定するには ???

考慮すべき状況: 初期実行可能基底解

もとの問題

$$\begin{array}{ll} \text{mimimize} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geqq 1 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{array}$$

標準形

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \end{array}$$

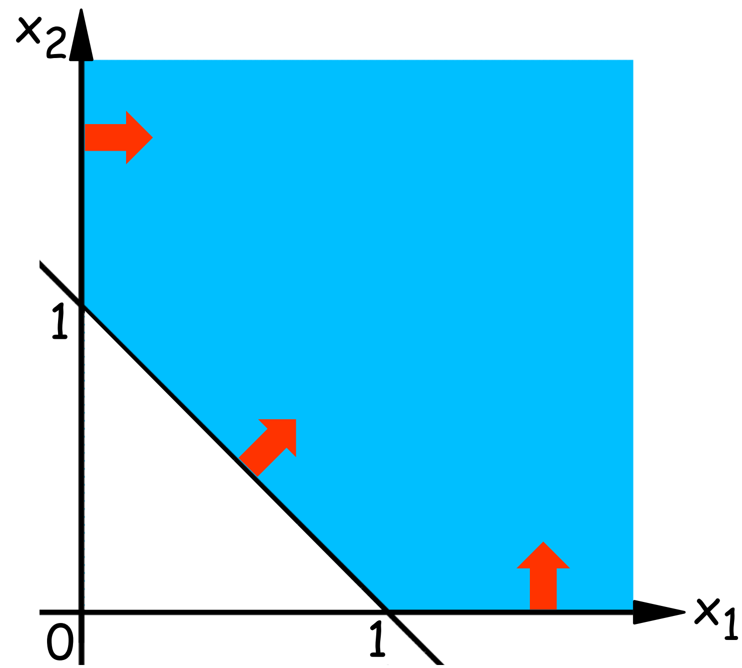
初期実行可能基底解

		x_1	x_2
z	0	- 1	- 2
x_3	$\boxed{-1}$	1	1

実行可能基底解になっていない
端点 (0, 0) に対応

		x_1	x_3
z	0	1	- 2
x_2	$\boxed{1}$	- 1	1

実行可能基底解になっている
端点 (0, 1) に対応



初期実行可能基底解は ???

二段階法

- もとの問題（標準形）

$$
\begin{array}{ll}
\text{mimimize} & z = -x_1 - 5x_2 \\
\text{subject to} & 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqq 0
\end{array}
$$

初期実行可能基底解 ???

- 人工問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{mimimize} & w = x_4 + x_5 \\
\text{subject to} & 4x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0
\end{array}
$$

制約式1つに**人工変数**1つ

人工変数の和を最小化

（人工変数を**全部 0** にしたい）

初期実行可能基底解

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$= (0, 0, 0, 6, 4)$

単体法を適用 (フェーズI)

人工問題の最適解

$(0, 2/5, 8/5, 0, 0)$

もとの問題の制約を満たす

= もとの問題の初期実行可能基底解が手に入った

単体法を適用 (フェーズII)

線形計画問題の定式化

max{ } 関数

- 複数の目的関数の最大値を最小化
  - minimize max{ f(x), g(x), h(x) }

→ 新たに変数 z を導入する

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & z \\
\text{subject to} & f(x) \leqq z,\ g(x) \leqq z,\ h(x) \leqq z
\end{array}
$$

練習問題:

- minimize $x_1 + |x_2|$

max{ } 関数

- 複数の目的関数の最大値を最小化
  - minimize max{ $f(x), g(x), h(x)$ }

→ 新たに変数 z を導入する

minimize z
subject to $f(x) \leqq z,\ g(x) \leqq z,\ h(x) \leqq z$

練習問題:

- minimize $x_1 + |x_2|$

$|x_2| = \max\{ x_2, -x_2 \}$

→ minimize $x_1 + x_2'$
subject to $x_2 \leqq x_2',\ -x_2 \leqq x_2'$

練習問題: 制約条件 (混合整数計画問題)

- 2つの変数 x, y は、$x = 0, 1$ で、y は $y \geqq 0$ の実数である。以下のような制約をかけるためには、それぞれどのような制約式を追加すればよいか示しなさい。

1. x が 1 の時にのみ $y \geqq 30$
2. x が 0 の時にのみ $y = 0$
3. x が 0 の時にのみ $y \leqq 10$
4. x が 0 の時には $y \leqq 10$, x が 1 の時には $y \geqq 30$
5. x が 0 の時には $y \leqq 10$, x が 1 の時には $y \leqq 30$

制約条件 (混合整数計画問題)

1. x が 1 の時にのみ y ≧ 30
   - **y ≧ 30 x**
     つまり **- 30 x + y ≧ 0**
   - x が 0 の時には y ≧ 0 となるので、
     x が 1 の時にのみ y ≧ 30 の制約を
     追加したことになる

制約条件 (混合整数計画問題)

2. x が 0 の時にのみ y = 0
   - $y \leqq Mx$　　(M は十分大きな定数)
     つまり $-Mx + y \leqq 0$
   - x が 0 の時には、$y \leqq 0$ となるので、
     $y \geqq 0$ と併せて y = 0 の制約となる

3. x が 0 の時にのみ $y \leqq 10$
   - $-Mx + y \leqq 10$　　(M は十分大きな定数)

制約条件 (混合整数計画問題)

4. x が 0 の時には $y \leqq 10$, x が 1 の時には $y \geqq 30$
   - $-Mx + y \leqq 10$,　　　(M は十分大きな定数)
     $-30x + y \geqq 0$
   - 1 と 3 を併せた制約となる

5. x が 0 の時には $y \leqq 10$, x が 1 の時には $y \leqq 30$
   - $y \leqq 10(1 - x) + 30x$
     つまり $-20x + y \leqq 10$

加藤直樹, 数理計画法, コロナ社
p. 58【7】より

練習問題: 定式化

n 個のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ が与えられている。各データ点は、赤か青の色が付いている。

1. 下に凸な放物線を引いて、放物線の**上が赤い点**、**下が青い点**になるようにしたい。そのような放物線がもし存在するならその**方程式を求める問題**を線形計画問題として定式化せよ。

2. ある円を描いて、**円の内部** (境界も含む) にすべての**赤い点**が入り、**円の外部** (境界も含む) にすべての**青い点**が存在するようにしたい。そのような**円が存在するか**どうかを**判定する**問題を、線形計画問題として定式化せよ。

定式化 (1)

加藤直樹, 数理計画法, コロナ社
p. 58【7】より

- (x_1, y_1) から (x_k, y_k) の k 個が赤い点、(x_{k+1}, y_{k+1}) から (x_n, y_n) の n - k 個が青い点として、一般性を失わない
- 放物線を $y = a x^2 + b x + c$ とする
- 線形計画問題は、以下の通りである
  - minimize　0
  - subject to

制約条件を満たすかの、判定問題

赤い点：$x_i^2 a + x_i b + c \geqq y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$

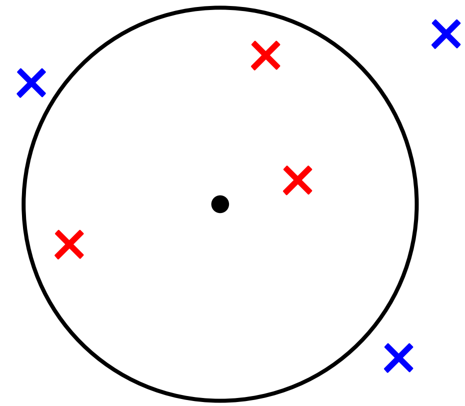
青い点：$x_i^2 a + x_i b + c \leqq y_i \quad (i = k+1, k+2, \ldots, n)$

$a > 0$, b, c: 自由変数

定式化 (2)

加藤直樹, 数理計画法, コロナ社
p. 58【7】より

- (x_1, y_1) から (x_k, y_k) の k 個が赤い点、(x_{k+1}, y_{k+1}) から (x_n, y_n) の n - k 個が青い点として、一般性を失わない



- 円の中心を (x, y) 、半径を r とする
- 各点の制約は、

赤い点 : $(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \leqq r^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$

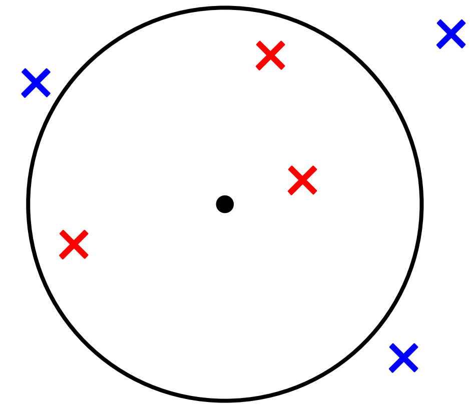
青い点 : $(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \geqq r^2 \quad (i = k+1, k+2, \ldots, n)$

- このままでは、x^2, y^2, r^2 が存在するため、線形計画問題にならない…　　(ホント？)

加藤直樹, 数理計画法, コロナ社
p. 58【7】より

定式化 (2)

- 円の中心を、点 $C\,(x, y)$ とする
- 制約条件を言い換える
- 任意の**赤い点 $P_i\,(x_i, y_i)$** と
  青い点 $P_j\,(x_j, y_j)$ の組合せが、
  距離 $CP_i \leqq$ 距離 CP_j を満たす



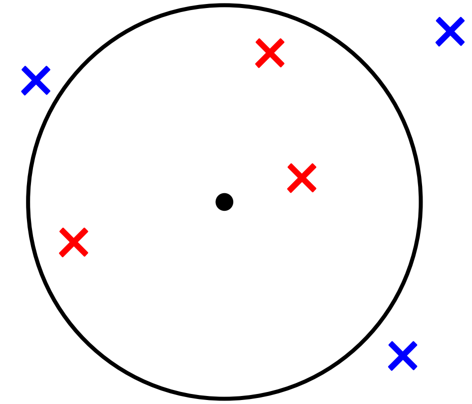
- つまり、制約条件は、
  任意の $i = 1, 2, \ldots, k$ と $j = k+1, k+2, \ldots, n$ に対して
  $(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \leqq (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2$ が成立すること
- 式を整理すると、制約条件は、
  $2\,(x_i - x_j)\,x + 2\,(y_i - y_j)\,y \geqq x_i^2 + y_i^2 - x_j^2 - y_j^2$ となる

加藤直樹, 数理計画法, コロナ社
p. 58【7】より

定式化 (2)

- 線形計画問題は、以下の通りである

制約条件を満たすかの、
判定問題



- minimize　　0

x_i, y_i, x_j, y_j は定数
であることに注意

- subject to

$$2(x_i - x_j)x + 2(y_i - y_j)y \geqq x_i^2 + y_i^2 - x_j^2 - y_j^2$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k;\ j = k+1, k+2, \ldots, n)$$

※ この線形計画問題を解くと、円の中心 (x, y) は
求められるが、円の半径は分からない

まとめ

- 単体法 (シンプレックス法)
  - 最初の実行可能基底解は？
  - ピボットの選択は？
- 考慮すべき状況、二段階法
- 線形計画問題の定式化