

大規模知識処理特論 (第7回) 最適化技法 (4)

補足資料：相補性定理



北海道大学 情報科学研究院
堀山 貴史

相補性定理

- 主問題 (P) の実行可能解 x と
双対問題 (D) の実行可能解 y が最適解

- \Leftrightarrow 以下が同時に成立する

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare y_i = 0 \text{ or } a_i^T x = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \blacksquare y^T A_j = c_j \text{ or } x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

証明) 弱双対定理より

$$\sum_i b_i y_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_j c_j x_j$$

x, y が最適解なので、等号成立

主問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z = c^T x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & w = y^T b \\ \text{subject to} & y^T A \leq c^T \\ & y^T \text{ 自由変数} \end{array}$$

相補性定理

■ 主問題

$$\begin{aligned} \text{mimimize } z &= -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{subject to } & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

■ 最適解: $(\underline{9/5}, 0, \underline{9/5}, 0)$

■ 最適値: $-9/5$

$x_1, x_3 \neq 0$

■ 双対問題

1つ目, 3つ目の
制約式

$$\begin{aligned} \text{maximize } w &= 9y_2 \\ \text{subject to } & y_1 + 2y_2 \leq -2 \\ & 2y_1 - 2y_2 \leq 1 \\ & -y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ & y_1 + 4y_2 \leq -1 \\ & y_1, y_2: \text{自由変数} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{■ } y_1 + 2y_2 = -2 \\ \text{■ } -y_1 + 3y_2 = 1 \end{array} \right. \quad (-8/5, -1/5) \quad \text{最適値: } -9/5$$

練習問題： 相補性定理

- 以下は、主問題とその最適解および最適値である。それぞれの双対問題を示し、相補性定理よりその最適解および最適値を求めなさい。

(a)

$$\begin{array}{l} \text{mimimize } z = -5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{subject to} \quad 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ \quad \quad \quad 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9 \\ \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

- 最適解： $(3/4, 0, 15/4, 0)$ 最適値： 0

(b)

$$\begin{array}{l} \text{mimimize } z = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{subject to} \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ \quad \quad \quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 10 \\ \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

- 最適解： $(0, 9, 17/2, 0)$ 最適値： -44