大規模知識処理特論 (第7回)
最適化技法 (4)

北海道大学 情報科学研究院
堀山 貴史

最適値の上界

- 最大化問題： 最適値の上界は？ ($z \leqq$ ○○)

$$
\begin{array}{llr}
\textbf{maximize} & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 \leqq 5 & \cdots (1) \\
 & x_2 + 2x_3 \leqq 3 & \cdots (2) \\
 & x_1 + x_3 \leqq 2 & \cdots (3) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 &
\end{array}
$$

- $\mathbf{2}$ (1) + $\mathbf{2}$ (2) より
  - $\boxed{2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leqq 16}$

(1), (2) を混ぜ合わせる

- $0 \leqq x_2$ より
  - $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$
    $\leqq 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leqq 16$

混ぜ合わせた式の
x_1, x_2, x_3 の各係数が
目的関数の各係数以上

16 より、もっと良い上界は？

最適値の上界

- 最大化問題： 最適値の上界は？ ($z \leqq$ ○○)

$$
\begin{array}{llr}
\textbf{maximize} & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 \leqq 5 & \cdots (1) \\
 & x_2 + 2x_3 \leqq 3 & \cdots (2) \\
 & x_1 + x_3 \leqq 2 & \cdots (3) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 &
\end{array}
$$

注： 不等号の向きを保つため、$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$

- y_1 (1) + y_2 (2) + y_3 (3) より
  - $(y_1 + y_3)x_1 + (2y_1 + y_2)x_2 + (2y_2 + y_3)x_3 \leqq 5y_1 + 3y_2 + 2y_3$
- この式が z の上界を与えるには、目的関数と見比べる
  - $y_1 + y_3 \geqq 2,\quad 2y_1 + y_2 \geqq 3,\quad 2y_2 + y_3 \geqq 4$
- minimize $5y_1 + 3y_2 + 2y_3$ … 上界をなるべく小さく

双対問題

- 主問題 (P)

$$\begin{array}{llr}
\textbf{maximize} & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 & \leqq 5 \\
 & x_2 + 2x_3 & \leqq 3 \\
 & x_1 + x_3 & \leqq 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 &
\end{array}$$

$$\text{maximize} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

- 双対問題 (D)

$$\begin{array}{llr}
\textbf{minimize} & w = 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 & \\
\text{subject to} & y_1 + y_3 & \geqq 2 \\
 & 2y_1 + y_2 & \geqq 3 \\
 & 2y_2 + y_3 & \geqq 4 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geqq 0 &
\end{array}$$

$$\text{minimize} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}^T$$

$$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$$

- 双対問題の双対は、主問題

双対問題

- 主問題 (P) (一般の形)

minimize	$z = c^T x$	
subject to	$a_i^T x = b_i$	$(i \in M)$
	$a_i^T x \geqq b_i$	$(i \in M')$
	$x_j \geqq 0$	$(j \in N)$
	x_j 自由変数	$(j \in N')$

- 双対問題 (D)

maximize	$w = y^T b$	
subject to	$y^T A_j \leqq c_j$	$(j \in N)$
	$y^T A_j = c_j$	$(j \in N')$
	y_i^T 自由変数	$(i \in M)$
	$y_i^T \geqq 0$	$(i \in M')$

- 双対問題の双対は、主問題

双対問題、弱双対定理

- 主問題 (P) (いつもの標準形)

minimize	$z = c^T x$
subject to	$A x = b$
	$x \geqq 0$

- 双対問題 (D)

maximize	$w = y^T b$
subject to	$y^T A \leqq c^T$
	y^T 自由変数

- 双対問題の双対は、主問題
- **弱双対定理**
  - x, y を (P), (D) の実行可能解とすると、$y^T b \leqq c^T x$

$y^T b = y^T A x \leqq c^T x$

練習問題: 双対問題

以下について、その双対問題を示しなさい

(a)

$$
\begin{array}{lllll}
\textbf{maximize} & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 & & & \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 & & = & 7 \\
& \phantom{x_1 +{}} x_2 + 2x_3 & & \leqq & 8 \\
& x_1 + \phantom{2x_2 +{}} x_3 & & \leqq & 9 \\
& x_1, x_2 \geqq 0 & & &
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{lllll}
\textbf{minimize} & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 & & & \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 & & = & 7 \\
& \phantom{x_1 +{}} x_2 + 2x_3 & & \geqq & 8 \\
& x_1 + \phantom{2x_2 +{}} x_3 & & \geqq & 9 \\
& x_1, x_2 \geqq 0 & & &
\end{array}
$$

練習問題: 双対問題、弱双対定理

1. 以下について、標準形と、その双対問題を示しなさい
   a. 第6回資料 p. 9 の問題
   b. 第6回資料 p. 10 の問題
   c. 第3回資料 p. 29 (a)
   d. 第3回資料 p. 29 (b)
   e. 第3回資料 p. 20 (a)
   f. 第3回資料 p. 20 (c)

2. 弱双対定理が成り立つことを示しなさい

双対定理

弱双対定理の系

主問題 (P) **min.** $c^T x$
双対問題 (D) **max.** $y^T b$
弱双対定理 $y^T b \leqq c^T x$

- 弱双対定理から、以下の系が導ける

- 主問題 **(P)** の実行可能解 x と
  双対問題 **(D)** の実行可能解 y が
  $c^T x = y^T b$ を満たすならば、

  x と y はそれぞれの問題の**最適解**

弱双対定理の系

主問題 (P) **min.** $c^T x$
双対問題 (D) **max.** $y^T b$
弱双対定理 $y^T b \leqq c^T x$

- 弱双対定理から、以下の系が導ける

- 主問題 **(P)** が**非有界**ならば、双対問題 **(D)** は**実行不能**
- 双対問題 **(D)** が**非有界**ならば、主問題 **(P)** は**実行不能**

証明)

- (P) が非有界のコストを持つ時には、
  $c^T x$ をいくらでも小さくできる
- (D) に実行可能解 y が存在すると仮定すると
  (P) の実行可能解 x は $c^T x \geqq y^T b$ の下界を持つ
- 矛盾 → (D) は実行不能

- 「 (D) が非有界ならば (P) は実行不能」も同様

強双対定理

- 主問題 (P) が**最適解** x^* を持つならば、
  双対問題 (D) も**最適解** y^* を持ち、
  2つの問題の**最適値は一致**する … $c^T x^* = y^{*T} b$

- 主問題と双対問題の解の関係

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3"></td><td colspan="3">双対問題</td></tr>
<tr><td colspan="2">実行可能</td><td rowspan="2">実行不能</td></tr>
<tr><td>最適解</td><td>非有界</td></tr>
<tr><td rowspan="3">主問題</td><td rowspan="2">実行可能</td><td>最適解</td><td>○</td><td>×</td><td>×</td></tr>
<tr><td>非有界</td><td>×</td><td>×</td><td>○</td></tr>
<tr><td colspan="2">実行不能</td><td>×</td><td>○</td><td>○</td></tr>
</table>

主問題も双対問題も実行不能な例

- 主問題 (P)

$$
\begin{array}{ll}
\text{mimimize} & z = -x_1 - x_2 \\
\text{subject to} & x_1 - x_2 = 1 \\
 & x_1 - x_2 = 0 \\
 & x_1, x_2 \geqq 0
\end{array}
$$

- 双対問題 (D)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & w = y_1 \\
\text{subject to} & y_1 + y_2 \leqq -1 \\
 & -y_1 - y_2 \leqq -1 \\
 & y_1, y_2 : \text{自由変数}
\end{array}
$$

$y_1 + y_2 \geqq 1$

練習問題: 双対定理

- 第6回資料 p. 11 の問題 (実行可能領域が非有界)
について、標準形と、その双対問題を示し、
双対問題が実行不能であることを確認しなさい

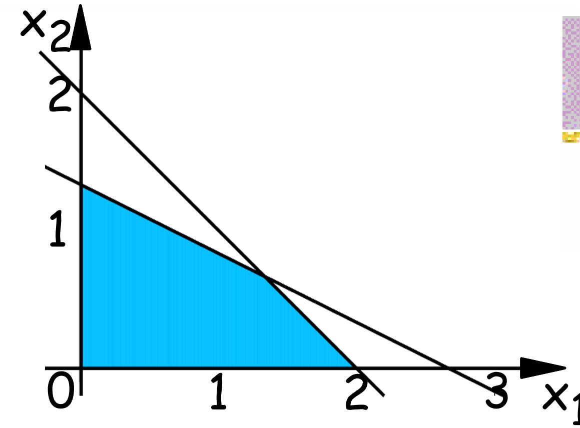
$$
\begin{array}{lll}
\text{mimimize} & z = -x_1 - 2x_2 & \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \geqq 1 & \\
 & x_1, x_2 \geqq 0 &
\end{array}
$$

練習問題:

以下について、標準形と、その双対問題を示しなさい
また、二段階法で解くなどして、主問題と双対問題がそれぞれ、
最適解を持つ/非有界/実行不能のどれか確認しなさい

a. 第6回資料 p. 9 の問題
b. 第6回資料 p. 10 の問題

線形計画法



- 単体法 (シンプレックス法)
  - 実行可能領域の端点から端点へ、境界上を進んで、最適解を得る
- 内点法
  - 実行可能領域の内部を進んで、最適解を得る

高速化 [Bixby 2002]

Solving real-world linear programs: a decade and more of progress

- ハードウェア: 800倍の高速化
- アルゴリズム: 2,400倍の高速化

} 1,900,000 倍

[Bertsimas, King, Mazumder 2016]

高速化の努力が続き、約25年で 450,000,000 倍

より詳しく知りたい人は

- 加藤直樹, 数理計画法, コロナ社
  ISBN 978-4339027198
- 宮代隆平, 整数計画ソルバー入門,
  オペレーションズ・リサーチ, 57-4 (2012), pp. 183-189.

Solver

- 商用：
  Gurobi, CPLEX, Matlab の Optimization Toolbox,
  Excel の ソルバーアドイン など
- フリー：
  SCIP, MIPCL, GLPK, lp_solve など