# 大規模知識処理特論
# 最適化技法 (1)

北海道大学 情報科学研究院
堀山 貴史

# 数理計画 と 最適化
# 数理計画モデル

- 最適な解を求める
- 何を最適化するの？
- どんな評価のもとで最適化するの？

# 生産計画問題

- 2種類の原料 A, B から、2種類の製品 1, 2 を生産
最大の利益をあげるには？
  - 製品 1 単位当たりの原料使用量
および原料使用可能量

| | 製品 1<br>(千 kg) | 製品 2<br>(千 kg) | 最大使用可能量<br>(千 kg) |
|---|---|---|---|
| 原料 A | 2 | 2 | 4 |
| 原料 B | 3 | 6 | 8 |

  - 製品 1 単位当たりの利益
    - 製品 1:  4万円
    - 製品 2:  5万円

# 生産計画問題の**定式化**

- 数学モデルとして表す
- 各製品の生産量を $x_1, x_2$ とする
- 目的： 利益を最大にしたい
  - 最大化　$4x_1 + 5x_2$
- 条件： 使用する原料は、利用可能量以下
  - 原料 A： $2x_1 + 2x_2 \leqq 4$
  - 原料 B： $3x_1 + 6x_2 \leqq 8$
- 条件： 各製品の生産量は、非負 (0 以上)
  - 製品 1： $x_1 \geqq 0$
  - 製品 2： $x_2 \geqq 0$

# 生産計画問題の**定式化**

- 各製品の生産量を $x_1, x_2$ とする ← 決定変数、**変数**
- maximize $4x_1 + 5x_2$ ← **目的関数**

  subject to $2x_1 + 2x_2 \leqq 4$ ← **制約条件**

  $3x_1 + 6x_2 \leqq 8$

  $x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$
- **線形計画問題** (linear programming problem)
  - 目的関数が、**一次**関数
    - 目的は、最大化 または 最小化
  - 制約条件が、すべて**一次**の不等式 or 等号

# 生産計画問題

- もし、各製品の生産量が**整数**なら…
- maximize $4x_1 + 5x_2$

  subject to $2x_1 + 2x_2 \leqq 4$

  $3x_1 + 6x_2 \leqq 8$

  $x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_1, x_2$ は整数
- **整数計画問題** (integer programming problem)
  - 変数の取る値が整数
  - 0–1 整数計画問題 … 変数の取る値が 0 or 1
  - 混合整数計画問題 … 一部の変数は整数、残りの変数は実数

# 練習問題: 生産計画問題の定式化

- 4種類の原料 A, B, C, D から、
  3種類の製品 1, 2, 3 を生産
  最大の利益をあげるには？
  - 製品 1 単位当たりの原料使用量、原料使用可能量

| | 製品 1 (千 kg) | 製品 2 (千 kg) | 製品 3 (千 kg) | 最大使用可能量 (千 kg) |
|---|---|---|---|---|
| 原料 A | 4 | 2 | 1 | 6 |
| 原料 B | 1 | 2 | 4 | 7 |
| 原料 C | 5 | 2 | 3 | 9 |
| 原料 D | 3 | 3 | 2 | 8 |

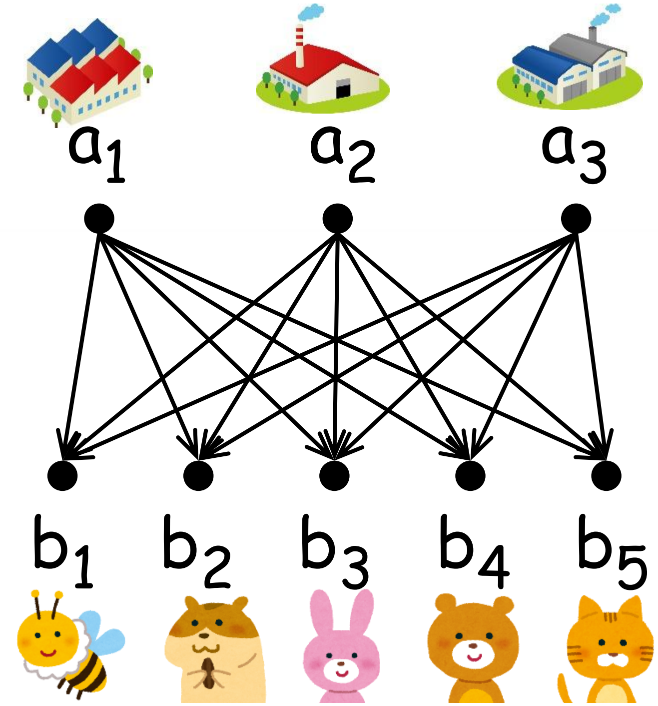
  - 製品 1 単位当たりの利益
    - 製品 1: 3万円、 製品 2: 5万円、 製品 3: 4万円

# 練習問題:　生産計画問題の定式化

- m 種類の原料 $S_1, S_2, \ldots, S_m$ から、
  n 種類の製品 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ を生産
  最大の利益をあげるには？
  - 製品 $P_i$ を 1 単位生産するのに必要な原料 $S_j$ の使用量を $c_{ij}$ とする
  - 原料 $S_j$ の最大使用可能量を $b_j$ とする
  - 製品 $P_i$ の 1 単位当たりの利益を $a_i$ とする

# 輸送問題

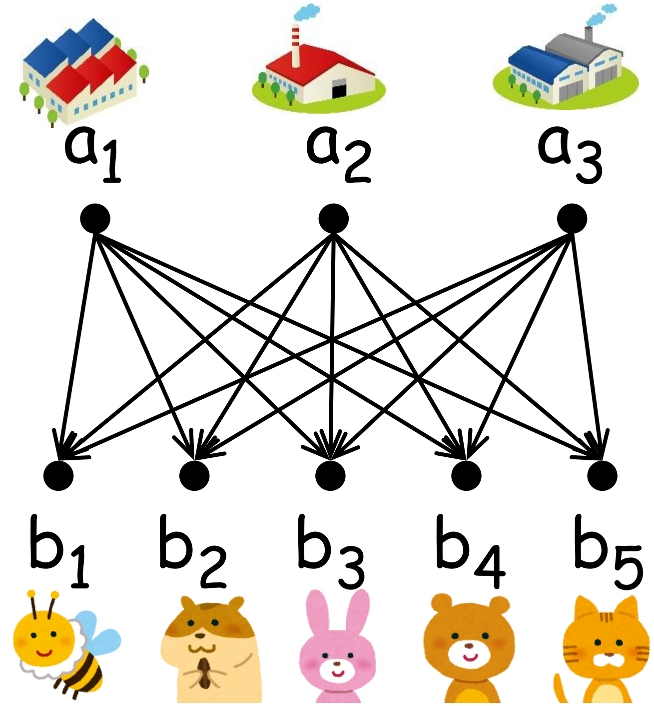
- 3つの工場 1, 2, 3 から
  5つの消費地 1, 2, 3, 4, 5 へ、
  製品を輸送する
- 輸送費用を最小にしたい




- 工場 i が1ヶ月に出荷できる量:  $a_i$
- 消費地 j での1ヶ月当たりの需要: $b_j$
- 工場 i から消費地 j への輸送費用:

  製品 1 単位当たり $c_{ij}$

# 輸送問題の定式化




- 工場 i から消費地 j へ輸送する製品の量を $x_{ij}$ とする

- minimize $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}\, x_{ij}$

subject to $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leqq a_i \quad (i = 1, 2, 3)$

工場 i の出荷量

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geqq b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, 5)$$

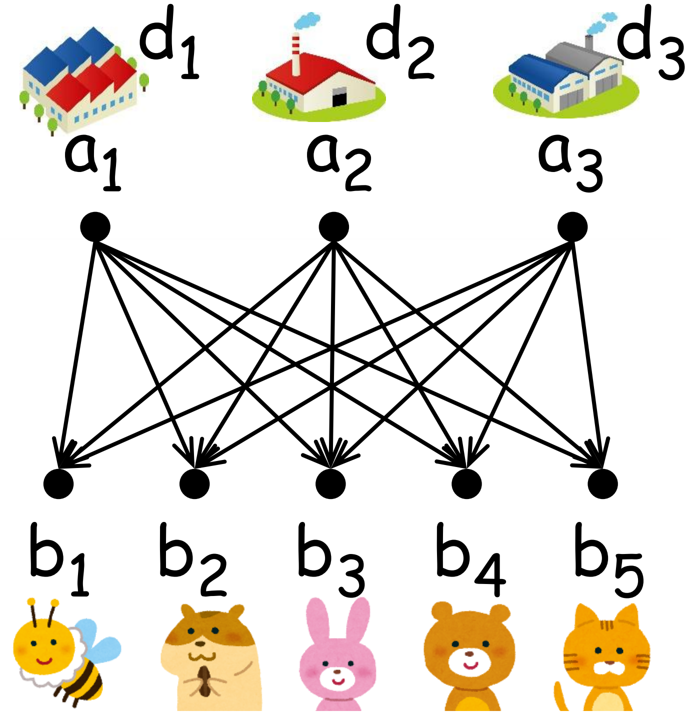
消費地 j の消費量

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, 3,\ \ j = 1, 2, \ldots, 5)$$

# 施設配置問題

- p. 9 の問題で、
  工場 i の稼働には、
  1ヶ月当たり経費が $d_i$ かかる
  (工場 i を使わない場合は、
  その工場の経費は 0)

- 輸送費用と工場経費の総和を最小にしたい



# 施設配置問題の定式化

- 工場 i から消費地 j へ輸送する製品の量を $x_{ij}$、
  工場 i を稼働させるかどうかを $y_i$ とする
  ($y_i = 1$ … 稼働させる、$y_i = 0$ … 稼働させない)

- minimize $\displaystyle \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{3} d_i y_i$

| 工場 i の出荷量 |
|---|

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leqq a_i y_i$$

$$\begin{cases} \displaystyle \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leqq a_i & \text{工場 i 稼働させる } (y_i = 1) \\ \displaystyle \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 0 & \text{工場 i 稼働させない } (y_i = 0) \end{cases}$$

# 施設配置問題の定式化

- 工場 $i$ から消費地 $j$ へ輸送する製品の量を $x_{ij}$、工場 $i$ を稼働させるかどうかを $y_i$ とする（$y_i = 1$ … 稼働させる、$y_i = 0$ … 稼働させない）

- minimize $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{3} d_i\, y_i$

subject to $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leqq a_i\, y_i \quad (i = 1, 2, 3)$

工場 $i$ の出荷量

$\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geqq b_j \quad (j = 1, 2, ..., 5)$

消費地 $j$ の消費量

$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, 3,\ \ j = 1, 2, ..., 5)$

$y_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, 2, 3)$

# 休 憩

- ここで、少し休憩しましょう。
- 深呼吸したり、肩の力を抜いてから、
次のビデオに進んでください。

# 線形計画法

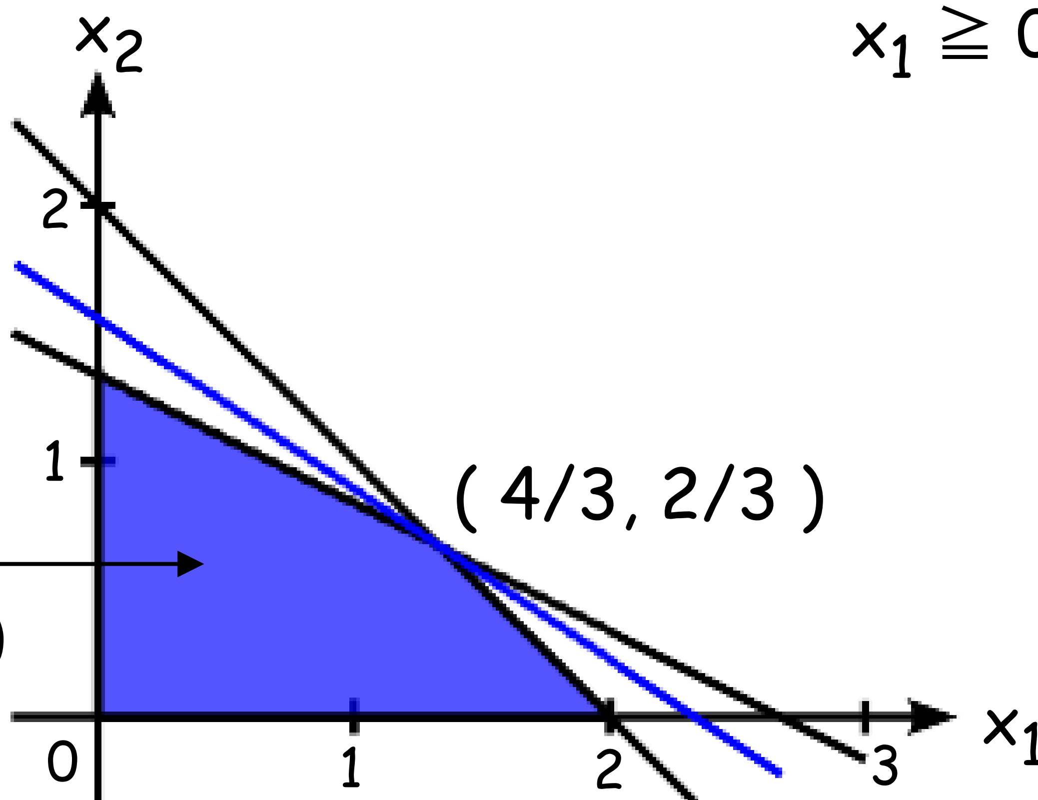
- 線形計画問題を、どうやって解くの？

# 練習問題: 図示して解く

- 最適解は？
  $( x_1, x_2 ) =$
- 最適値は？

- maximize $4 x_1 + 5 x_2$

  subject to
  $$2 x_1 + 2 x_2 \leqq 4$$
  $$3 x_1 + 6 x_2 \leqq 8$$
  $$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$




制約領域、
**実行可能領域**
(feasible region)

# 練習問題: 図示して解く

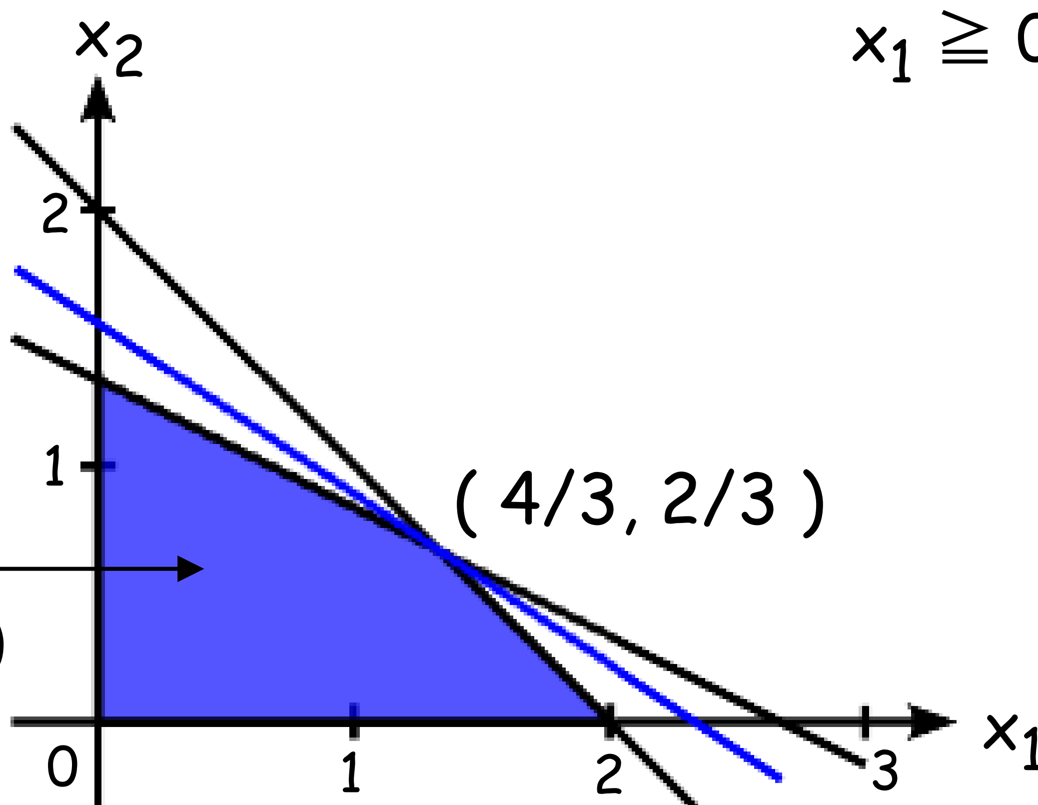
- 最適解は？
  $(x_1, x_2) = (4/3, 2/3)$
- 最適値は？ 26/3

- maximize $4x_1 + 5x_2$

subject to $2x_1 + 2x_2 \leqq 4$

$3x_1 + 6x_2 \leqq 8$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$




制約領域、
**実行可能領域**
(feasible region)

## 練習問題: 図示して解く (整数計画問題は…)

- 最適解は？
  $(x_1, x_2) =$
- 最適値は？

- maximize $4x_1 + 5x_2$

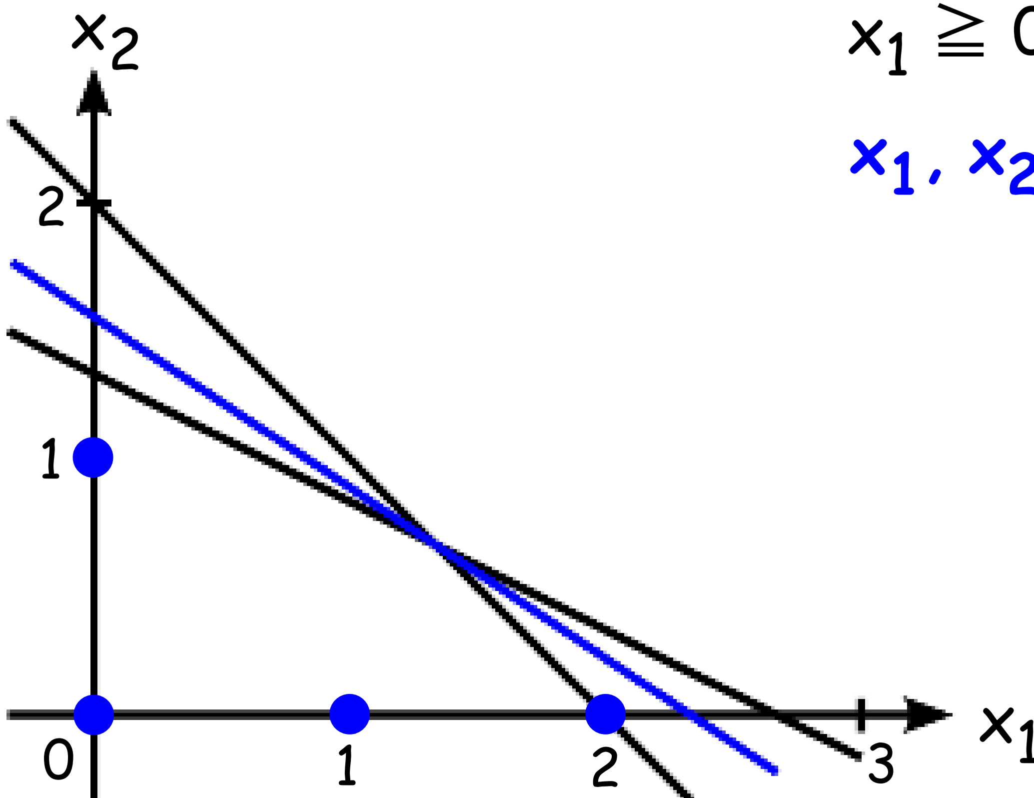
  subject to $2x_1 + 2x_2 \leqq 4$

  $3x_1 + 6x_2 \leqq 8$

  $x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

  **$x_1, x_2$ は整数**

**実行可能集合**
(feasible set)



# 練習問題: 図示して解く (整数計画問題は…)

- 最適解は？
  $(x_1, x_2) = (2, 0)$
- 最適値は？　8

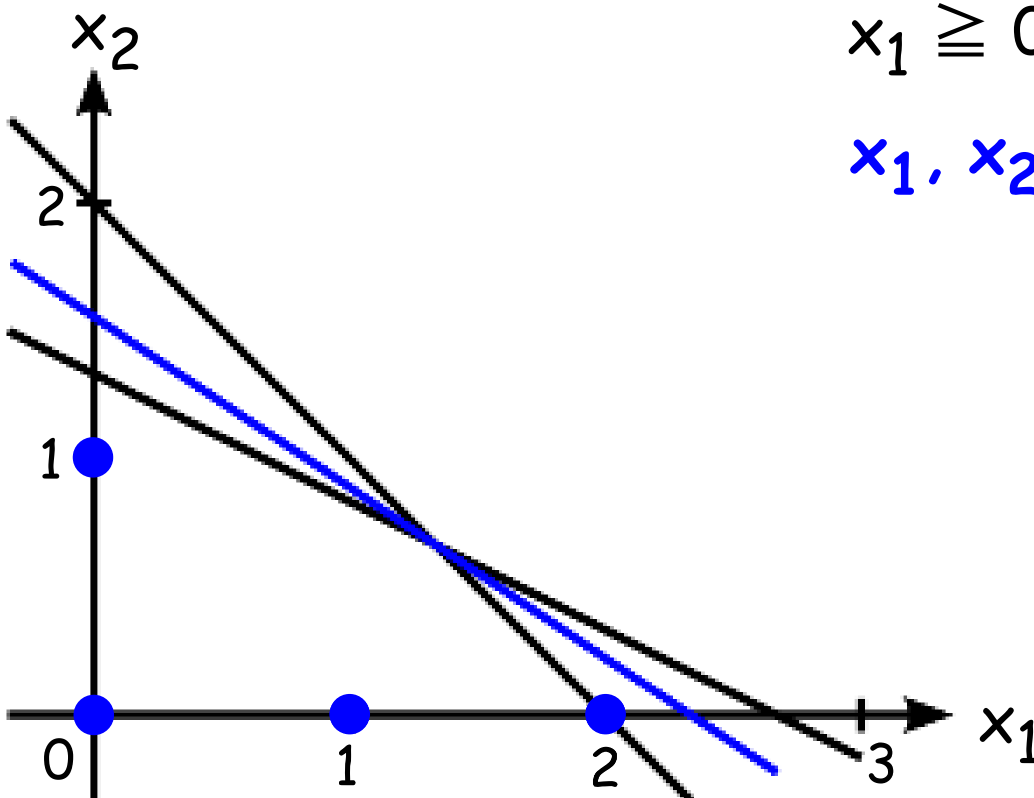
- maximize $4x_1 + 5x_2$

  subject to $2x_1 + 2x_2 \leqq 4$

  $3x_1 + 6x_2 \leqq 8$

  $x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

  **$x_1, x_2$ は整数**




**実行可能集合**
(feasible set)

# 練習問題: 図示して解く

(a) maximize $4x_1 + 5x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 &\leqq 4 \\
3x_1 + 6x_2 &\leqq 8 \\
x_1 + 4x_2 &\leqq 4 \\
x_1 \geqq 0,\ x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

(b) 問(a)の maximize を minimize に変更

(c) maximize $4x_1 + 2x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leqq 8 \\
x_1 &\leqq 6 \\
x_1 + 2x_2 &\geqq 2 \\
x_1 \geqq 0,\ x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

(d) 問(c)の maximize を minimize に変更

# 発展問題: 図示して解く（できれば挑戦してください）

- slide 7 の線形計画問題を解きなさい
  - **3次元空間**
  - $4 x_1 + 2 x_2 + x_3 \leqq 6$ … 平面で切った半分の領域

- 3次元以上の線形計画問題を図示して解くのは、非常に困難である

# 線形計画法
# 標準形

# 標準形

- すべての線形計画問題は、
  **標準形** (standard form) に書き直すことができる

- **minimize** $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

  subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

  $x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

ただし、$b_i \geqq 0$ (※ 忘れやすいので注意)

# 標準形への変形の例

- maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

  subject to $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqq 4$

  $x_1 - x_2 + 4x_3 \geqq 5$

  $x_1, x_2 \geqq 0$, $x_3$: 自由変数

- maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$
- minimize $z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

符号の反転

# 標準形への変形の例 （つづき）

- maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

  subject to
  $$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqq 4$$
  $$x_1 - x_2 + 4x_3 \geqq 5$$
  $x_1, x_2 \geqq 0$, $x_3$: 自由変数

- $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqq 4$
- $2x_1 + x_2 \underline{- 3x_3} + s_1 = 4$, $s_1 \geqq 0$

**スラック変数**
(余裕変数) の導入

# 標準形への変形の例 （つづき）

- maximize $\quad z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

  subject to
  $$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqq 4$$
  $$x_1 - x_2 + 4x_3 \geqq 5$$
  $x_1, x_2 \geqq 0,\ x_3$: 自由変数

どちらも**スラック変数**と呼ぶことが多い

- $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqq 4$
- $2x_1 + x_2 \underline{- 3x_3} + \mathbf{s_1} = 4,\ s_1 \geqq 0$

**スラック変数**
(余裕変数) の導入

- $x_1 - x_2 + 4x_3 \geqq 5$
- $x_1 - x_2 \underline{+ 4x_3} - \mathbf{s_2} = 5,\ s_2 \geqq 0$

**サープラス変数**
(過剰変数) の導入

# 標準形への変形の例 （つづき）

- maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$
  subject to $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqq 4$
  $x_1 - x_2 + 4x_3 \geqq 5$
  $x_1, x_2 \geqq 0$, $x_3$: 自由変数

どちらも**スラック変数**と呼ぶことが多い

- $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqq 4$
- $2x_1 + x_2 \underline{- 3x_3} + \mathbf{s_1} = 4$, $s_1 \geqq 0$

**スラック変数**(余裕変数) の導入

- $x_1 - x_2 + 4x_3 \geqq 5$
- $x_1 - x_2 \underline{+ 4x_3} - \mathbf{s_2} = 5$, $s_2 \geqq 0$

**サープラス変数**(過剰変数) の導入

- $2x_1 + x_2 \underline{- 3x_3' + 3x_3''} + s_1 = 4$
- $x_1 - x_2 \underline{+ 4x_3' - 4x_3''} - s_2 = 5$, $x_3', x_3'' \geqq 0$

非負変数の導入

# 標準形への変形の例 (つづき)

- maximize $z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

  subject to
  $$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqq 4$$
  $$x_1 - x_2 + 4x_3 \geqq 5$$
  $x_1, x_2 \geqq 0$, $x_3$: 自由変数

- minimize $z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3' - 4x_3''$

  subject to
  $$2x_1 + x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + s_1 = 4$$
  $$x_1 - x_2 + 4x_3' - 4x_3'' - s_2 = 5$$
  $$x_1, x_2, x_3', x_3'', s_1, s_2 \geqq 0$$

# 練習問題: 標準形への変形

(a) maximize $z = 4x_1 + 2x_2$

subject to

$$2x_1 + 2x_2 \leqq 4$$
$$-3x_1 - 6x_2 \leqq -9$$
$x_1 \geqq 0$, $x_2$: 自由変数

(b) maximize $z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$

subject to

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqq 6$$
$$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leqq -2$$
$x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $x_3$: 自由変数

# まとめ

- 問題の定式化
  - **線形計画問題**
  - **整数計画問題**
- 線形計画問題の解法
  - 図示して解く
  - 3変数以上の線形計画問題を図示して解くのは、非常に困難
- 線形計画問題の**標準形**
  - すべての線形計画問題は、標準形に書き直すことができる