大規模知識処理特論

最適化技法 (4)

補足資料: 相補性定理

北海道大学 情報科学研究院
堀山 貴史

相補性定理

- 主問題 (P) の実行可能解 x と
双対問題 (D) の実行可能解 y が最適解
- ⇔ 以下が同時に成立する
  - $y_i = 0$ or $a_i^T x = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$
  - $y^T A_j = c_j$ or $x_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

証明) 弱双対定理より

$$\sum_i b_i y_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) y_i = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j \leqq \sum_j c_j x_j$$

x, y が最適解なので、等号成立

主問題

$$\begin{array}{ll} \textbf{minimize} & z = c^T x \\ \text{subject to} & A x = b \\ & x \geqq 0 \end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll} \textbf{maximize} & w = y^T b \\ \text{subject to} & y^T A \leqq c^T \\ & y^T \text{ 自由変数} \end{array}$$

相補性定理

- 主問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{mimimize} & z = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
& 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0
\end{array}
$$

  - 最適解：$(\underline{9/5},\ 0,\ \underline{9/5},\ 0)$
  - 最適値：$-9/5$

$x_1, x_3 \neq 0$

- 双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & w = 9y_2 \\
\text{subject to} & y_1 + 2y_2 \leqq -2 \\
& 2y_1 - 2y_2 \leqq 1 \\
& -y_1 + 3y_2 \leqq 1 \\
& y_1 + 4y_2 \leqq -1 \\
& y_1, y_2 : \text{自由変数}
\end{array}
$$

1つ目，3つ目の制約式

$$
\begin{cases}
y_1 + 2y_2 = -2 \\
-y_1 + 3y_2 = 1
\end{cases}
$$

$(-8/5,\ -1/5)$　最適値：$-9/5$

練習問題: 相補性定理

- 以下は、主問題とその最適解および最適値である。それぞれの双対問題を示し、相補性定理よりその最適解および最適値を求めなさい。

(a)

$$
\begin{array}{ll}
\text{mimimize} & z = -5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\
\text{subject to} & 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\
 & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0
\end{array}
$$

- 最適解: (3/4, 0, 15/4, 0)　　最適値: 0

(b)

$$
\begin{array}{ll}
\text{mimimize} & z = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\
\text{subject to} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\
 & x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 10 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0
\end{array}
$$

- 最適解: (0, 9, 17/2, 0)　　最適値: -44