

大規模知識処理特論

最適化技法 (4)



北海道大学 情報科学研究院
堀山 貴史

最適値の上界

- 最大化問題： 最適値の上界は？ ($z \leq \text{○○}$)

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_2 \leq 5 & \cdots (1) \\ & x_2 + 2x_3 \leq 3 & \cdots (2) \\ & x_1 + x_3 \leq 2 & \cdots (3) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

- $\textcolor{blue}{2}(1) + \textcolor{blue}{2}(2)$ より

■ $2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 16$

(1), (2) を混ぜ合わせる

- $0 \leq x_2$ より

■ $\begin{aligned} z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ &\leq 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 16 \end{aligned}$

混ぜ合わせた式の
 x_1, x_2, x_3 の各係数が
目的関数の各係数以上

16より、もっと良い上界は？

最適値の上界

- 最大化問題：最適値の上界は？ ($z \leq \text{○○}$)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & x_1 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

… (1)
… (2)
… (3)

注：不等号の向きを
保つため、
 $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- y_1 (1) + y_2 (2) + y_3 (3) より
 - $(y_1 + y_3)x_1 + (2y_1 + y_2)x_2 + (2y_2 + y_3)x_3 \leq 5y_1 + 3y_2 + 2y_3$
- この式が z の上界を与えるには、目的関数と見比べる
 - $y_1 + y_3 \geq 2, 2y_1 + y_2 \geq 3, 2y_2 + y_3 \geq 4$
- minimize $5y_1 + 3y_2 + 2y_3$ … 上界をなるべく小さく

双対問題

■ 主問題 (P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{subject to } & \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

■ 双対問題 (D)

$$\begin{aligned} & \text{minimize } w = 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ \text{subject to } & \begin{aligned} y_1 + y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + y_2 &\geq 3 \\ 2y_2 + y_3 &\geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

■ 双対問題の双対は、主問題

双対問題

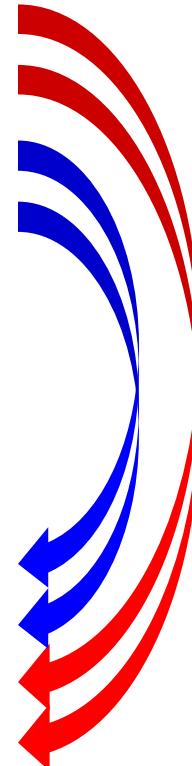
■ 主問題 (P) (一般の形)

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & z = c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x = b_i \quad (i \in M) \\ & a_i^T x \geq b_i \quad (i \in M') \\ & x_j \geq 0 \quad (j \in N) \\ & x_j \text{ 自由変数} \quad (j \in N')\end{array}$$

■ 双対問題 (D)

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & w = y^T b \\ \text{subject to} & y^T A_j \leq c_j \quad (j \in N) \\ & y^T A_j = c_j \quad (j \in N') \\ & y_i \text{ 自由変数} \quad (i \in M) \\ & y_i \geq 0 \quad (i \in M')\end{array}$$

■ 双対問題の双対は、主問題



双対問題、弱双対定理

■ 主問題 (P) (いつもの標準形)

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & z = c^T x \\ \text{subject to} & A x = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

■ 双対問題 (D)

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & w = y^T b \\ \text{subject to} & y^T A \leqq c^T \\ & y^T \text{ 自由変数}\end{array}$$

■ 双対問題の双対は、主問題

$$y^T b = y^T A x \leqq c^T x$$

■ 弱双対定理

■ x, y を (P), (D) の実行可能解とすると、 $y^T b \leqq c^T x$

練習問題： 双対問題

以下について、その双対問題を示しなさい

(a)

$$\begin{aligned} & \text{maximize } z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{subject to } & x_1 + 2x_2 = 7 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1 + x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{subject to } & x_1 + 2x_2 = 7 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ & x_1 + x_3 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

練習問題： 双対問題、弱双対定理

1. 以下の問題について、標準形と、その双対問題を示しなさい
 - a. “最適化技法 (3)” 資料 p. 9
 - b. “最適化技法 (3)” 資料 p. 10
 - c. “最適化技法 (1)” 資料 p. 29 (a)
 - d. “最適化技法 (1)” 資料 p. 29 (b)
 - e. “最適化技法 (1)” 資料 p. 20 (a)
 - f. “最適化技法 (1)” 資料 p. 20 (c)
2. 弱双対定理が成り立つことを示しなさい

双対定理



弱双対定理の系

主問題 (P) $\min. c^T x$
双対問題 (D) $\max. y^T b$
弱双対定理 $y^T b \leq c^T x$

- 弱双対定理から、以下の系が導ける
- 主問題 (P) の実行可能解 x と
双対問題 (D) の実行可能解 y が
 $c^T x = y^T b$ を満たすならば、

x と y はそれぞれの問題の最適解

弱双対定理の系

主問題 (P) $\min. c^T x$
双対問題 (D) $\max. y^T b$
弱双対定理 $y^T b \leq c^T x$

- 弱双対定理から、以下の系が導ける
- 主問題 (P) が**非有界**ならば、双対問題 (D) は**実行不能**
- 双対問題 (D) が**非有界**ならば、主問題 (P) は**実行不能**

証明)

- (P) が**非有界**のコストを持つ時には、
 $c^T x$ をいくらでも小さくできる
- (D) に実行可能解 y が存在すると仮定すると
(P) の実行可能解 x は $c^T x \geq y^T b$ の下界を持つ
- 矛盾 \rightarrow (D) は実行不能
- 「(D) が**非有界**ならば (P) は**実行不能**」も同様

強双対定理

- 主問題 (P) が**最適解** x^* を持つならば、
双対問題 (D) も**最適解** y^* を持ち、
2つの問題の**最適値は一致**する ... $c^T x^* = y^{*T} b$
- 主問題と双対問題の解の関係

			双対問題		
			実行可能		実行不能
主問題	最適解		最適解	非有界	
	実行可能	最適解	○	×	×
	非有界		×	×	○
実行不能			×	○	○

主問題も双対問題も実行不能な例

■ 主問題 (P)

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z = -x_1 - x_2 \\ & \text{subject to} \quad x_1 - x_2 = 1 \\ & \quad x_1 - x_2 = 0 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

■ 双対問題 (D)

$$\begin{aligned} & \text{maximize } w = y_1 \\ & \text{subject to} \quad y_1 + y_2 \leq -1 \\ & \quad -y_1 - y_2 \leq -1 \quad \boxed{y_1 + y_2 \geq 1} \\ & \quad y_1, y_2: \text{自由変数} \end{aligned}$$

練習問題： 双対定理

- “最適化技法 (3)” 資料 p. 11 の問題 (実行可能領域が非有界) について、標準形と、その双対問題を示し、双対問題が実行不能であることを確認しなさい

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z = -x_1 - 2x_2 \\ & \text{subject to } x_1 + x_2 \geq 1 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

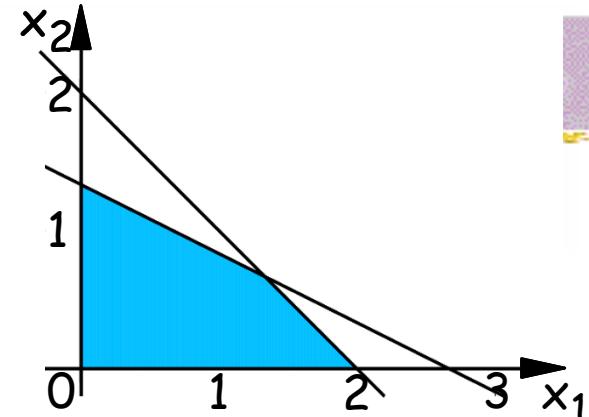
練習問題：

以下について、標準形と、その双対問題を示しなさい
また、二段階法で解くなどして、主問題と双対問題がそれぞれ、最適解を持つ/非有界/実行不能のどれか確認しなさい

- “最適化技法 (3)” 資料 p. 9 の問題
- “最適化技法 (3)” 資料 p. 10 の問題

線形計画法

- 単体法 (シンプレックス法)
 - 実行可能領域の端点から端点へ、境界上を進んで、最適解を得る
- 内点法
 - 実行可能領域の内部を進んで、最適解を得る



高速化

[Bixby 2002]

Solving real-world linear programs:
a decade and more of progress

- ハードウェア: 800倍の高速化
 - アルゴリズム: 2,400倍の高速化
- } 1,900,000 倍

[Bertsimas, King, Mazumder 2016]

高速化の努力が続き、約25年で 450,000,000 倍

より詳しく知りたい人は

- 加藤直樹, 数理計画法, コロナ社
ISBN 978-4339027198
- 宮代隆平, 整数計画ソルバー入門,
オペレーションズ・リサーチ, 57-4 (2012), pp. 183-189.

Solver

- 商用：
Gurobi, CPLEX, Matlab の Optimization Toolbox,
Excel の ソルバーアドイン など
- フリー：
SCIP, MIPCL, GLPK, Ip_solve など