

# 大規模知識処理特論

## 第 4 回

---

脊戸 和寿

# 今回の講義内容

計算量理論の基礎について学ぶ

- 還元 (帰着)
- NP 完全問題と多項式時間還元
- CNF-SAT から 3SAT への多項式時間還元
- 3SAT から頂点被覆問題への多項式時間還元

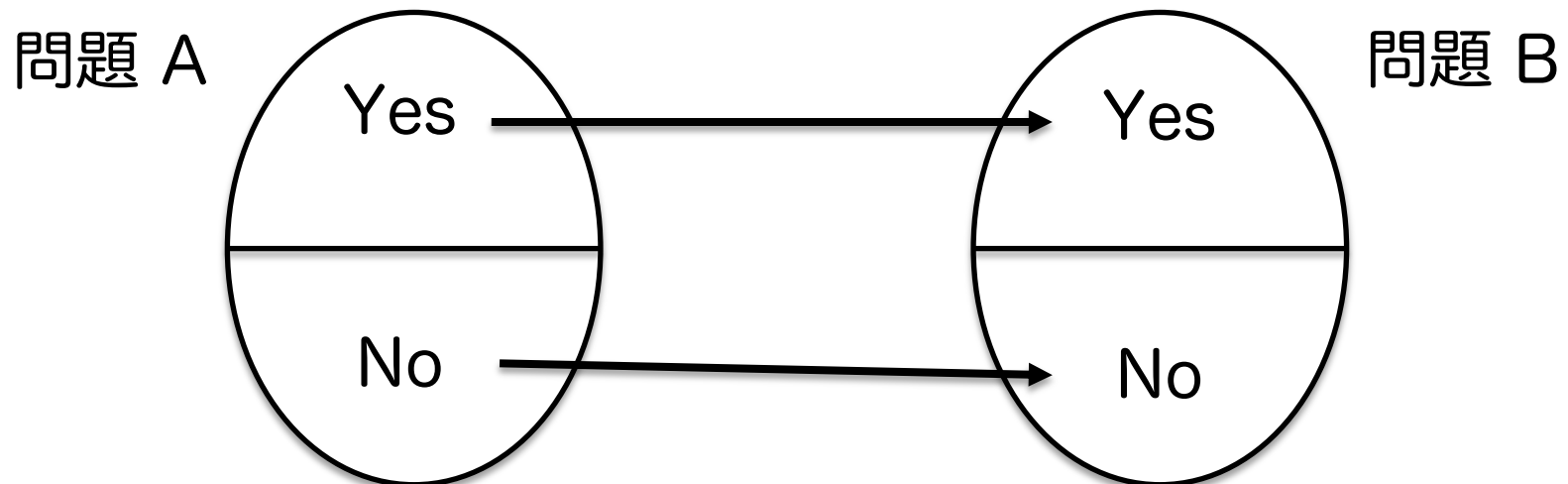
還元  
(帰着)

---

# 還元 (帰着)

決定問題 A のインスタンスから決定問題 B のインスタンスへの写像であり次の条件を満たす

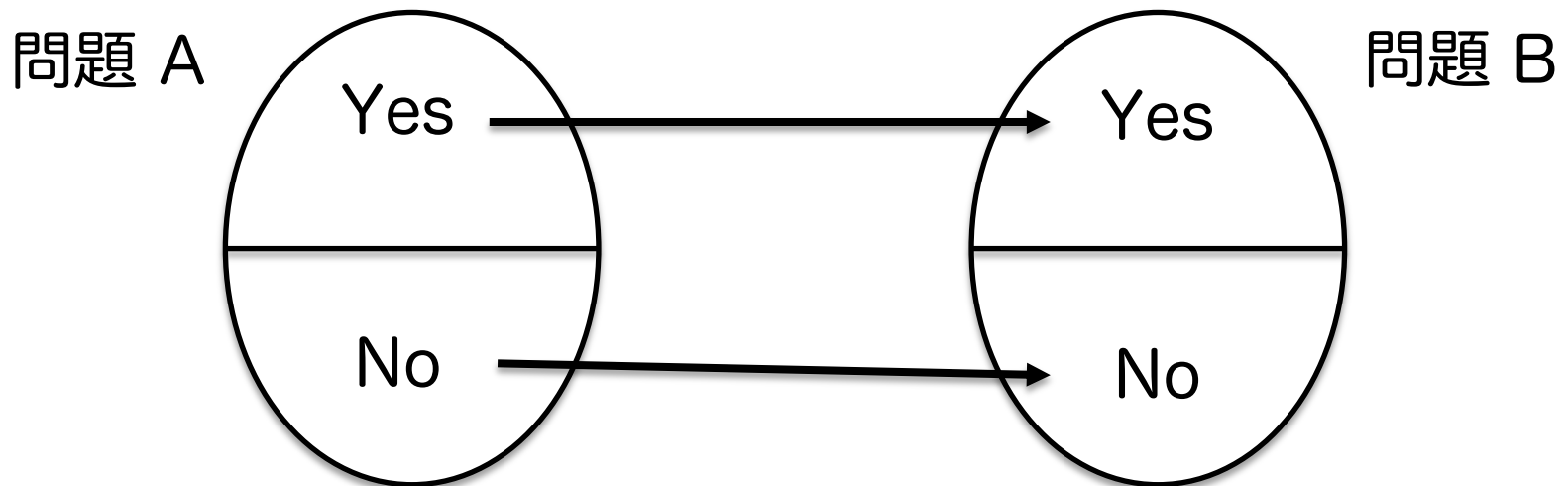
- A で Yes のインスタンスならば、還元先のインスタンスでも Yes。No も同様。



# 還元 (帰着)

還元を行うことで、元の決定問題 A での Yes / No 判定を、決定問題 B での Yes / No 判定に置き換えることができる。

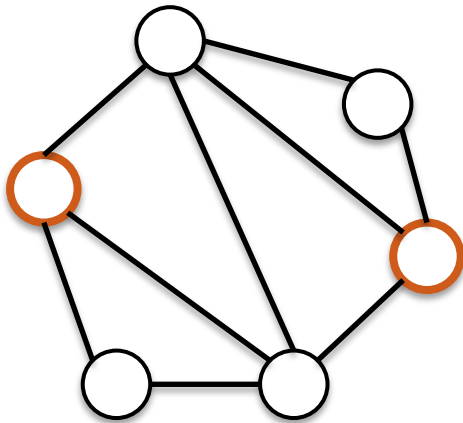
➤ B を解くことで、A を間接的に解くことができる。



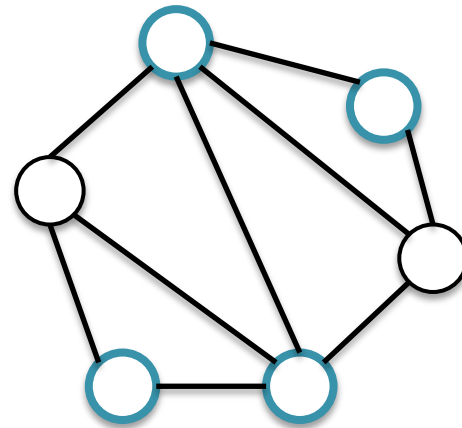
# 還元の例

下記の 2 つの問題を考える.

- 独立集合問題 ( Independent Set Problem : IS )
- 頂点被覆問題 ( Vertex Cover Problem : VC )



独立点集合



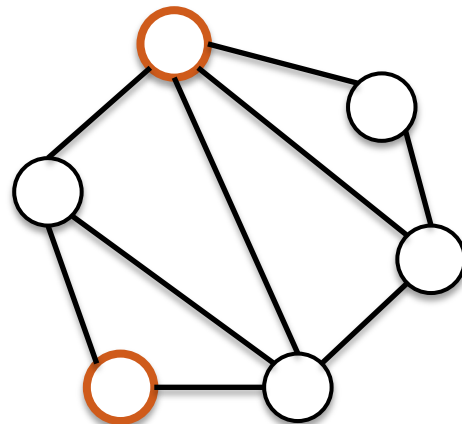
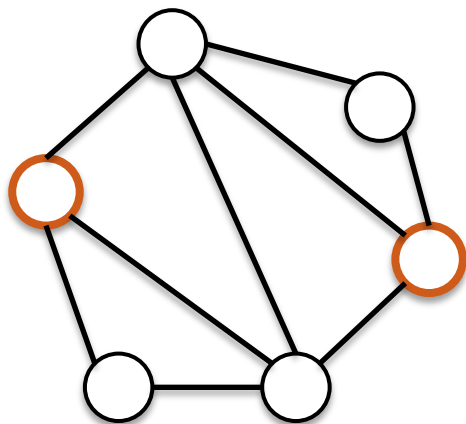
頂点被覆集合

# 独立集合問題 (IS)

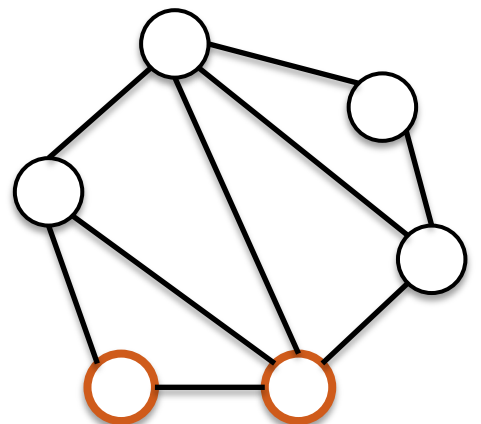
入力：無向グラフ  $G$  と正の整数  $k$

問：  $G$  には大きさ  $k$  の独立集合が存在するか？

独立集合：集合に属する頂点間には辺がない頂点集合



$k=2$  の例



×

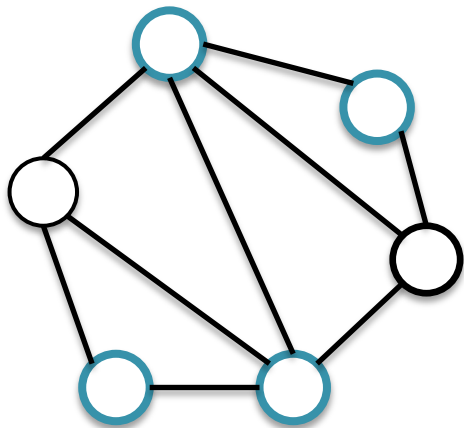
# 頂点被覆問題 ( VC )

入力：無向グラフ  $G$  と正の整数  $k$

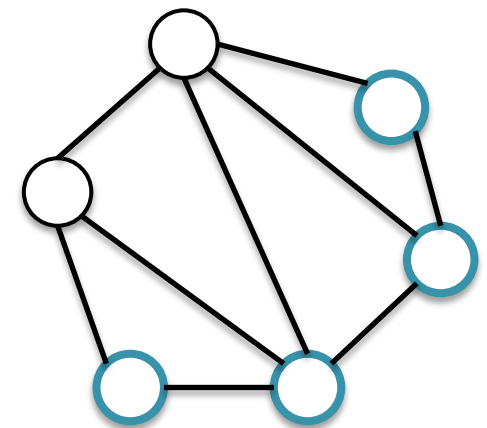
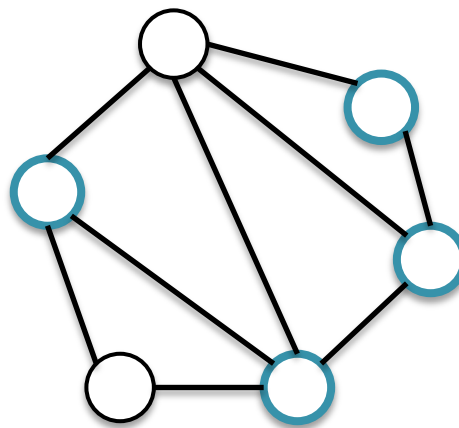
問：  $G$  には大きさ  $k$  の頂点被覆が存在するか？

頂点被覆：

任意の辺に対して、少なくとも一方の端点が属する頂点集合



$k=4$  の例

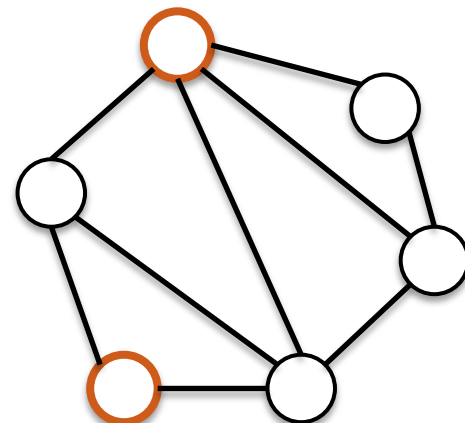
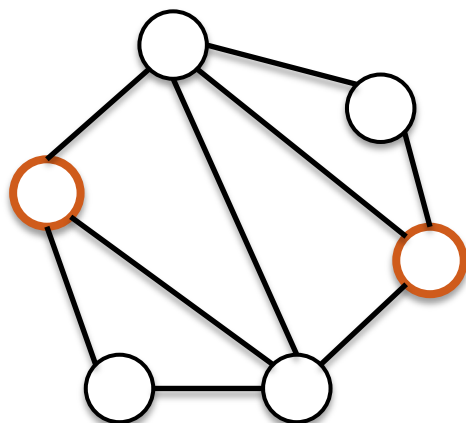


×

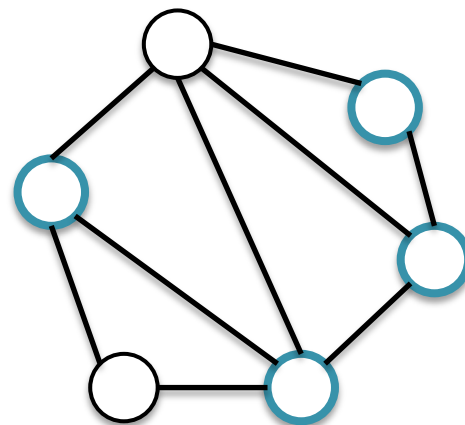
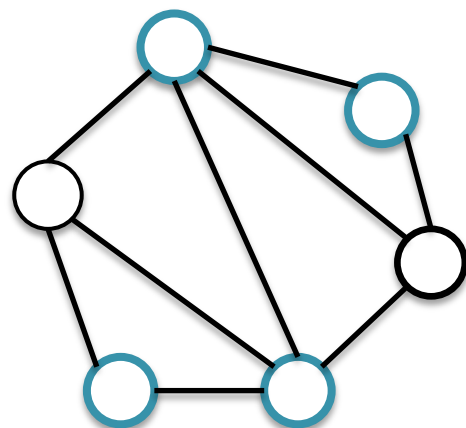


# IS と VC の関係

IS (  $k=2$  )



VC (  $k=4$  )



# IS と VC の関係

無向グラフ  $G$  にサイズ  $k$  の独立集合が存在する



無向グラフ  $G$  にサイズ  $n-k$  の頂点被覆が存在する

$V$  を  $G$  の頂点集合とする

$S$  を  $G$  の独立集合、 $V$  から  $S$  を除いた頂点集合を  $T$  とする

⇒  $S$  の頂点間には辺がない

⇒  $S$  の各頂点は  $T$  のいずれかの頂点と辺を共有している

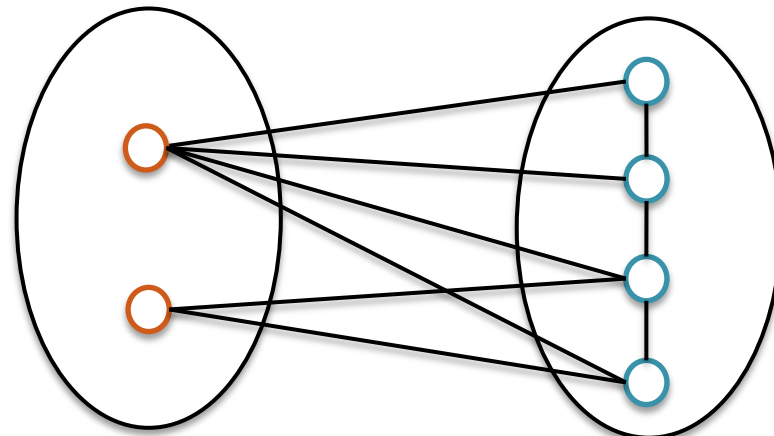
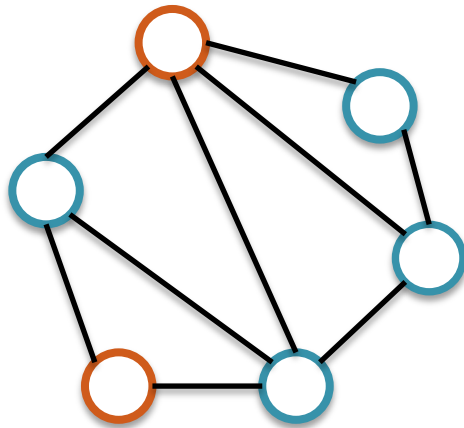
⇒  $T$  は頂点被覆になっている

# IS と VC の関係

無向グラフ  $G$  にサイズ  $k$  の独立集合が存在する



無向グラフ  $G$  にサイズ  $n-k$  の頂点被覆が存在する



S  
独立集合

T  
頂点被覆

# IS から VC への還元

入力：無向グラフ  $G$  と整数  $k$

問 (IS) :  $G$  にはサイズ  $k$  の独立集合が存在するか？

問 (VC) :  $G$  にはサイズ  $n-k$  の頂点被覆が存在するか？

IS で Yes であれば、VC も Yes であることはわかった

⇒ IS で No ならば、VC でも No ?

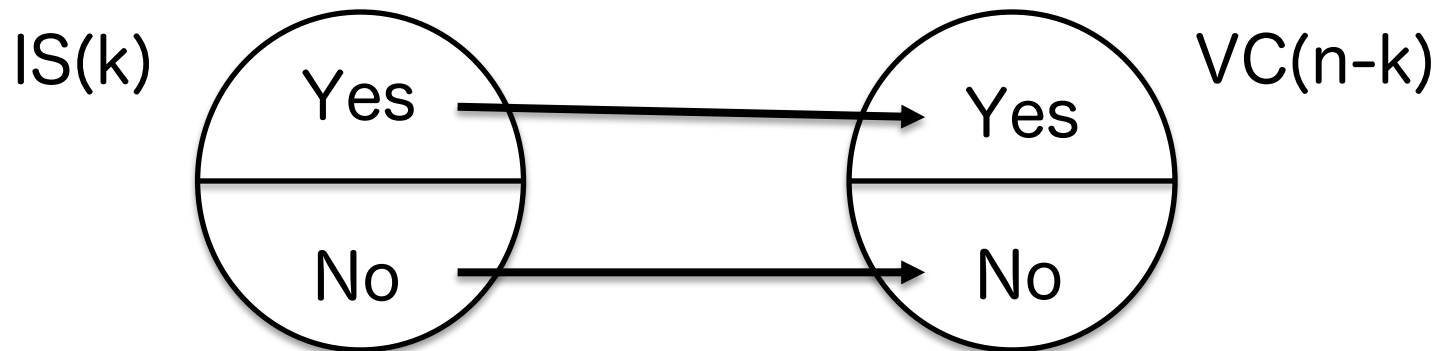
対偶を考える : VC で Yes ならば、IS で Yes ?

⇒ 成り立つ (なぜ成り立つか考えてみることに)

# ISからVCへの還元

IS のインスタンスから VC のインスタンスへの下記の写像が存在する

- 無向グラフ  $G$  上でサイズ  $k$  の独立集合をもつ  
⇒ サイズ  $n-k$  の頂点被覆をもつ
- 無向グラフ  $G$  上でサイズ  $k$  の独立集合をもたない  
⇒ サイズ  $n-k$  の頂点被覆をもたない



# NP 完全問題と多項式時間還元

---

# クラス P とクラス NP

クラス P ( Polynomial time )

- 決定性 TM で多項式時間で解ける決定問題の集合

クラス NP ( Nondeterministic Polynomial time )

- 非決定性 TM で多項式時間で解ける決定問題の集合
- Yes となる列  $x$  と証拠  $w$  を与えたときに、決定性 TM で多項式時間で Yes と判定できる決定問題の集合

# NP 完全問題（NPC）

NP 完全問題（NPC）は次の条件を満たす問題を言う

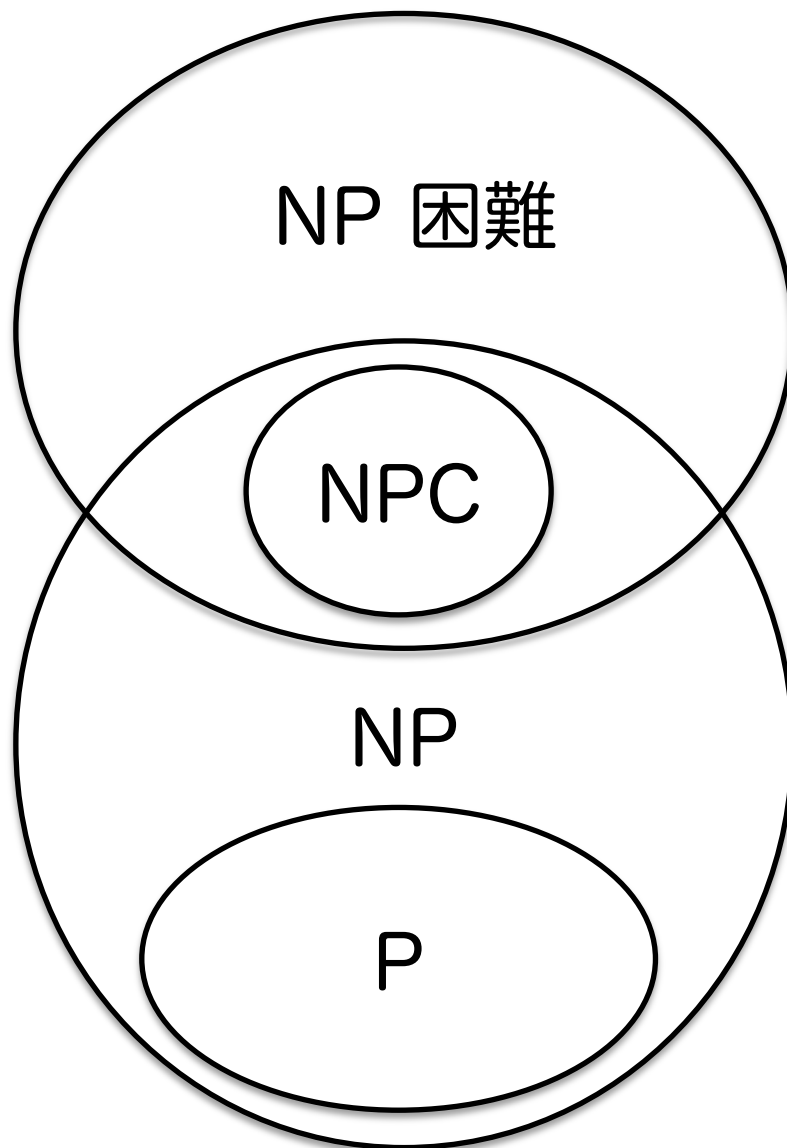
- NP に属する
- 任意の NP に属する問題から多項式時間還元が可能である

多項式時間還元：問題 A から問題 B への還元が、問題 A のインスタンスサイズの多項式時間で可能である

2 つ目の条件のみを満たす問題を「NP 困難」という。



# P、NP、NPC の包含関係



# NP 完全問題（NPC）

- ざっくり言うと、NPC はクラス NP の中で最も難しい問題
- ⇒ NPC が解ければ、任意の NP の問題が解ける
  - ⇒ NPC を決定性多項式時間で解くことができれば、 $P = NP$ .

どんな問題が NPC ？

- 充足可能性問題
- 独立集合問題
- 頂点被覆問題
- ハミルトン閉路問題

そのほかにも多数存在する

# 充足可能性問題 ( SAT )

入力：論理式  $\phi$

問：  $\phi=1$  とする入力変数への 0 / 1 割当が存在するか？

$\phi=1$  となる割当  $\alpha$  を充足解といい、 $\alpha$  は  $\phi$  を充足するという。 $\phi$  に充足解が存在するとき、 $\phi$  は充足可能という。

論理式  $\phi$  を CNF に限定したものを、CNF-SAT という

例： $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$

# 充足可能性問題（SAT）

SAT は NP 完全問題と証明された最初の問題

Cook-Levin の定理 [Cook '71, Levin '73]

SAT（CNF-SAT）は NP 完全問題である

証明は略。TM のシミュレートを SAT に書き換える。

SAT から多項式時間還元可能な問題も NP 完全問題である

➤ SAT からの多項式時間還元の例を見ていく

# CNF-SAT から 3SAT への 多項式時間還元

---

# 3充足可能性問題 ( 3SAT )

## kSAT

入力：kCNF  $\phi$

問　：  $\phi=1$  とする入力変数への 0 / 1 割当が存在するか？

kCNF：CNF かつ各節内の変数が高々 k 個

3CNF の例： $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)$

k=3 のときを、3SAT という。

# 4SAT から 3SAT への還元

まず、4SAT から 3SAT への還元の例を考える

下記の長さ 4 の節  $C$  を考える

$$C = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$$

新たな変数  $z$  を用いて、次の 2 つの節  $C_1$  と  $C_2$  を作成する

$$C_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee z \quad C_2 = \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{z}$$

# CNF-SAT から 3SAT への還元

まずは、下記を示す

➤  $C$  が充足される  $\Rightarrow C_1$  と  $C_2$  の両方が充足される

$$C = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$$

$$C_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee z \qquad C_2 = \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{z}$$

$x_1$  or  $\bar{x}_2$  が 1  $\Rightarrow z = 0$  とすれば、 $C_1$  と  $C_2$  とともに充足される

$\bar{x}_3$  or  $x_4$  が 1  $\Rightarrow z = 1$  とすれば、 $C_1$  と  $C_2$  とともに充足される

つまり、 $C$  を  $C_1 \wedge C_2$  に置き換えても充足可能なまま



# 4SAT から 3SAT への還元

長さ 4 の節について、同様の変換を行うことで、  
4CNF  $\phi$  から 3CNF  $\phi'$  に書き換えることができる  
このとき、 $\phi$  が充足可能であれば、 $\phi'$  も充足可能である

では、 $\phi$  が充足可能でないとき、 $\phi'$  も充足可能でないのか？

➤ 対偶を考える

「 $\phi'$  が充足可能であれば、 $\phi$  も充足可能である」

# 4SAT から 3SAT への還元

先ほどの例だと,

$C_1$  と  $C_2$  とともに充足可能  $\Rightarrow C$  も充足可能

$$C_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee z \qquad C_2 = \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{z}$$

$$C = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$$

$z = 0$  のとき  $\Rightarrow x_1$  or  $\bar{x}_2$  が 1

$z = 1$  のとき  $\Rightarrow \bar{x}_3$  or  $x_4$  が 1

いずれの場合でも、 $C$  は充足される。

# 4SAT から 3SAT への還元

この還元は入力サイズの多項式時間で可能

4CNF  $\phi$  の変数の数を  $n$ 、節の数を  $m$  とする

- 各節について前述した操作を行う。この操作は節に 4 個しか変数がないので、定数ステップ  $O(1)$  で可能。
- 節の数は  $m$  個なので、合計  $O(m)$  時間で変換が可能。

入力サイズは  $n+m$  なので、この還元は多項式時間で完了。

- $\phi'$  は変数の数が最大で  $n+m$ 、節の数が最大で  $2m$  となる。

# kSAT から 3SAT への還元

4SAT から 3SAT と同じ還元を繰り返すことを考えればよい  
下記の長さ  $k$  の節  $C$  を考える。

$$C = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \cdots \vee x_{k-1} \vee x_k$$

新たな変数  $z_1, z_2, \dots, z_{k-3}$  を用いて次の CNF に置き換える。

$$C' = (x_1 \vee x_2 \vee z_1)(\bar{z}_1 \vee x_3 \vee z_2)(\bar{z}_2 \vee x_4 \vee z_3) \cdots (\bar{z}_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k)$$

この置き換えにより kSAT から 3SAT への還元が可能。

# kSAT から 3SAT への還元

この還元は入力サイズの多項式時間で可能

kCNF  $\phi$  の変数の数を  $n$ 、節の数を  $m$  とする

- 各節について前述した操作を行う。この操作は節に  $k$  個変数があるので、 $O(k)$  時間で可能。
- 節の数は  $m$  個なので、合計  $O(km)$  時間で変換が可能。

入力サイズは  $n+m$  なので、この還元は多項式時間で完了。

- $\phi'$  は変数の数が  $n+m(k-3)$ 、節の数が  $(k-2)m$  となる。

# CNF-SAT から 3SAT への還元

CNF-SAT は  $k$ SAT の  $k$  に制限がない場合なので、 $k$ SAT から 3SAT への還元を同様に行えばよい。

- 実際には、 $k$  は最大でも  $n$  にしかない
  - ✓ 同じリテラルは 1 つにまとめる
  - ✓  $x$  と  $\bar{x}$  が含まれていれば、その節は 1 となるので考えない

よって、 $k=n$  を考えればよいので、この還元が元の CNF-SAT のサイズの多項式時間で終わることは明らか。

⇒ 3SAT は NP 完全問題

# 練習問題1

次の 4SAT のインスタンスを 3SAT のインスタンスに還元せよ

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

# 練習問題1 解答

次の 4SAT のインスタンスを 3SAT のインスタンスに還元せよ

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

$$\begin{aligned} \phi' = & (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee z_1)(\bar{z}_1 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee z_2)(\bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{z}_2) \\ & \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee z_3)(x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{z}_3) \end{aligned}$$



# 3SAT から頂点被覆問題への 多項式時間還元

---

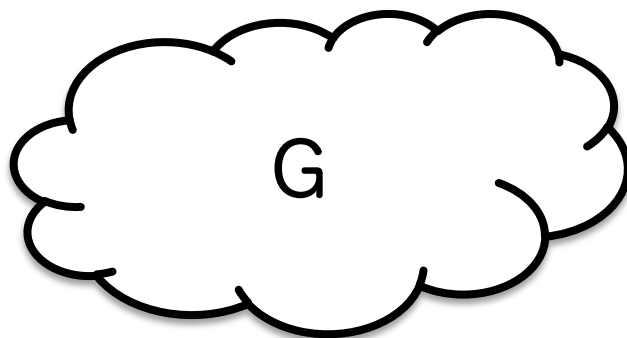
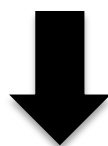
# 3SAT から VC への還元

CNF-SAT から 3SAT への還元は論理式から論理式への還元

今度は、論理式からグラフへの還元。

簡単のため、3CNF は全ての節に 3 つの変数が含まれるとする。

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$



# 3SAT から VC への還元

還元方法は次の通り

STEP 1 : 2 つのガジェットを作成する

➤ 変数ガジェット

- ✓ 各変数ごとに正リテラルと負リテラルに対応する頂点を作成し、その 2 頂点を辺でつなぐ

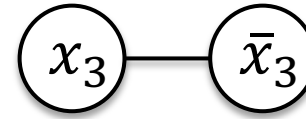
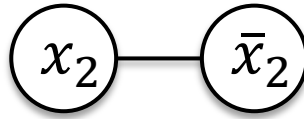
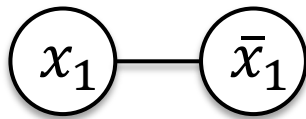
➤ 節ガジェット

- ✓ 各節ごとに、節内のリテラルに対応する頂点を作成し、各頂点間を辺でつなぐ

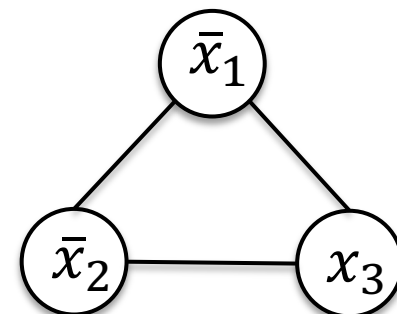
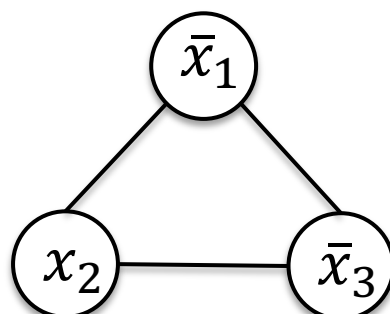
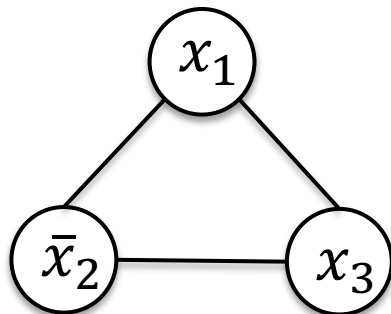
# 3SAT から VC への還元

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

変数ガジェット



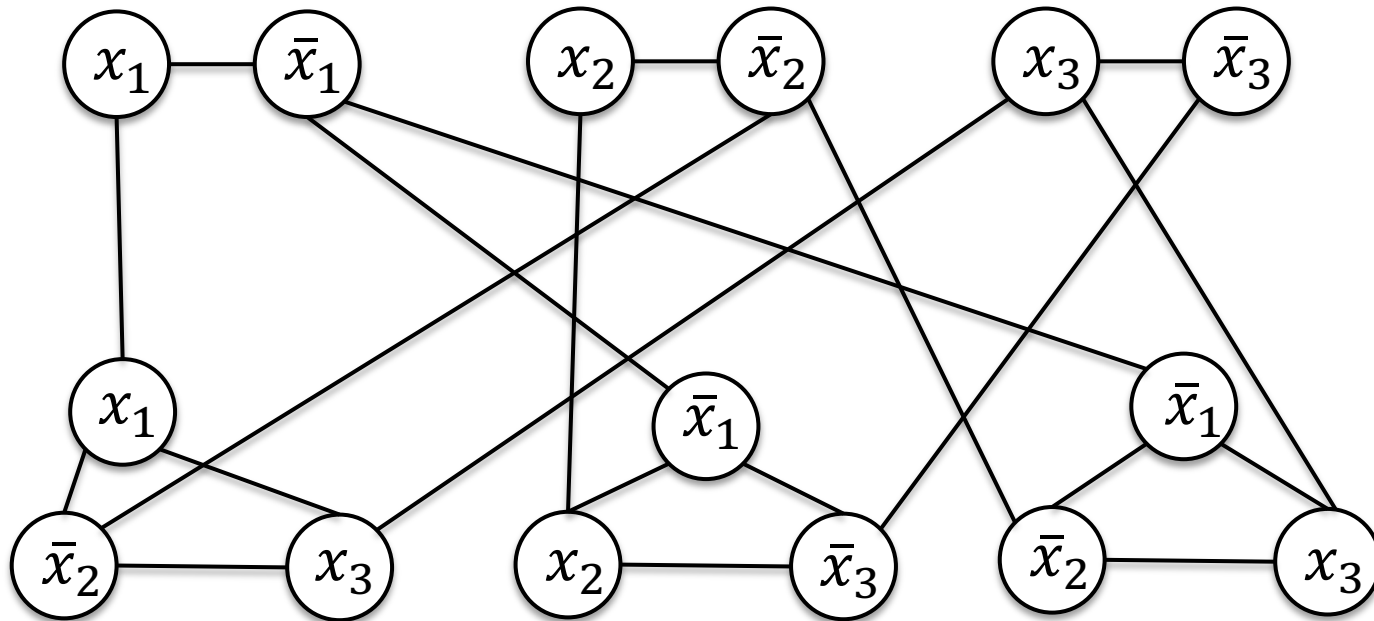
節ガジェット



# 3SAT から VC への還元

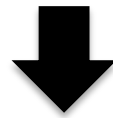
STEP 2 : 変数ガジェットと節ガジェット間を辺でつなぐ

➤ 同じリテラルの頂点同士を全て辺でつなぐ

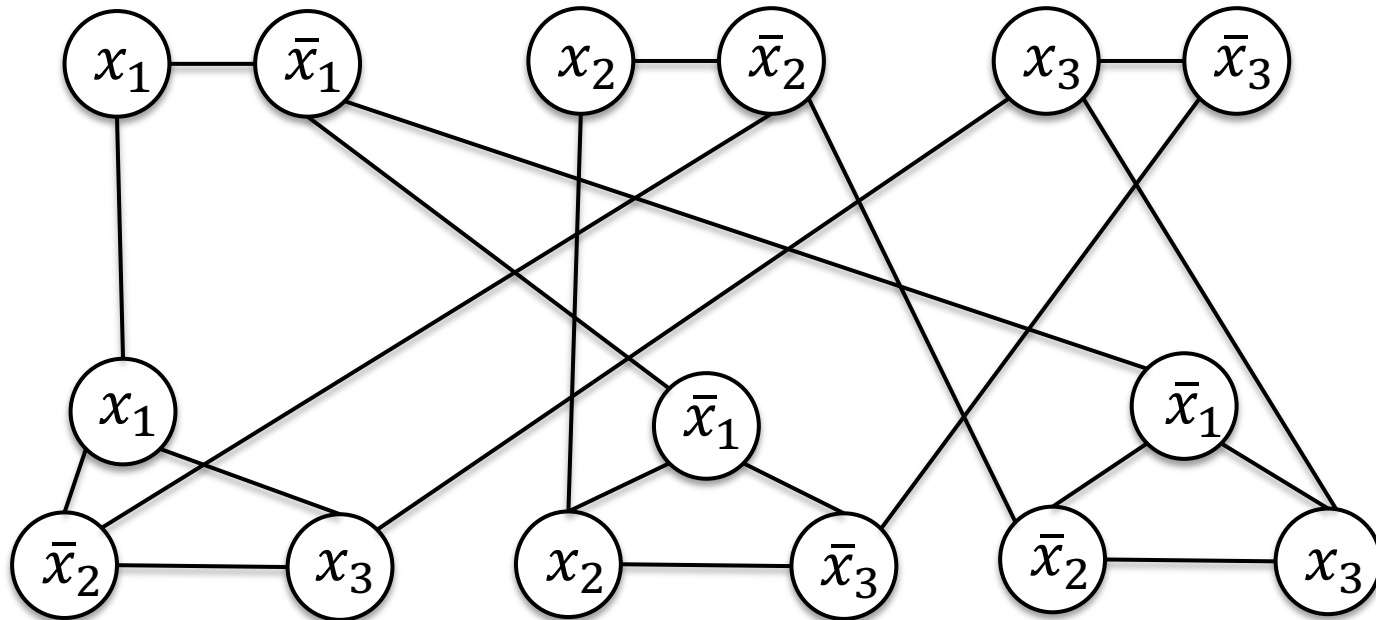


# 3SAT から VC への還元

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$



G



Yes/Noは保存されているのか??

# 3SAT から VC への還元

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

充足解  $\alpha$  として、 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$  を考える

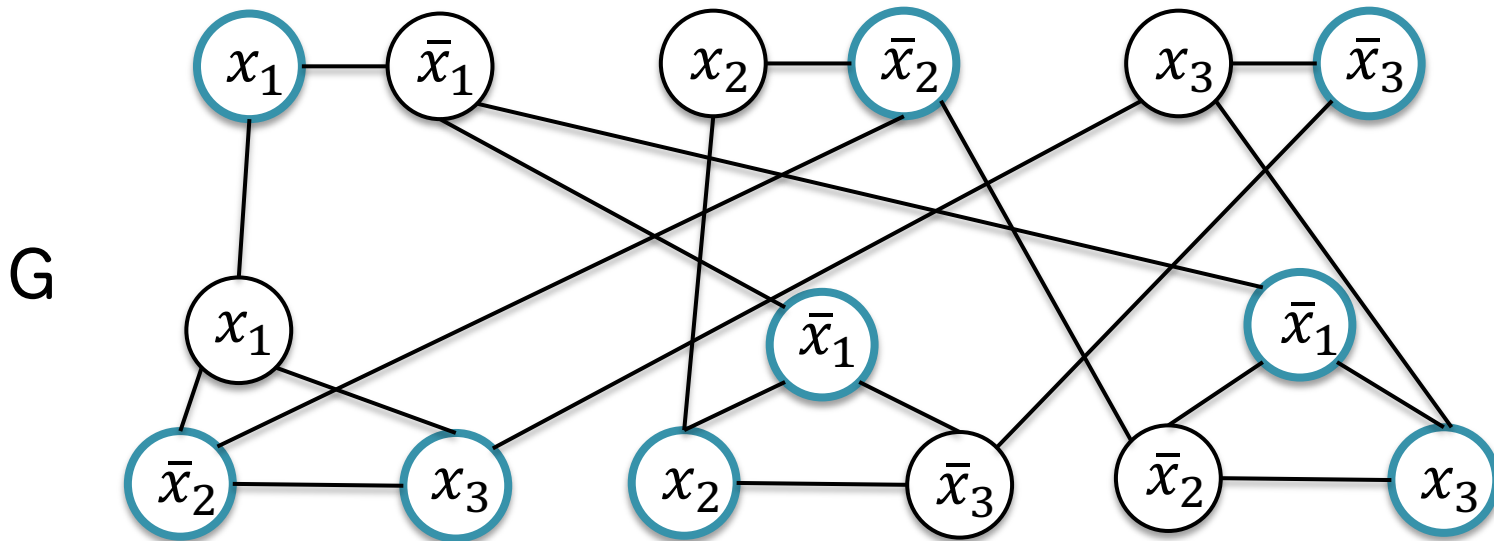
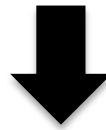
次の条件を満たすように頂点を選べば、頂点被覆が得られる

- 変数ガジェットから 1 となるリテラルに対応する頂点を選ぶ
  - ✓ 今なら、 $x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
- 各節ガジェットから変数ガジェットで選んだ頂点とつながっている頂点を 1 つ除いた 2 つの頂点を選ぶ
  - ✓ 複数つながっていた場合はつながっている中から適当に 1 つ選び、それ以外の 2 頂点を選べばよい

# 3SAT から VC への還元

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

充足解  $\alpha : x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$



確かに、頂点被覆になっている



# 3SAT から VC への還元

3CNF の変数の数を  $n$ 、節の数を  $m$  とすると、  
還元後の VC は頂点数  $2n+3m$ 、辺の数  $4n+3m$  となる。  
また、頂点被覆のサイズは  $n+2m$  となる。

このCNF  $\phi$  からグラフ  $G$  への変換が  $n+m$  の多項式時間で完了することは、グラフ  $G$  の構成方法からも明らか。

# 3SAT から VC への還元

どんな場合でも、Yes は本当に Yes のままになる??

充足解がある  $\Rightarrow$  各節に 1 となるリテラルが最低 1 つは存在

➤ それ以外の 2 つのリテラルに対応する頂点を各節ガジェットで選べば、各節ガジェット内の 3 辺の端点がそれら 2 つの頂点に必ず接続している

$\Rightarrow$  節ガジェット内はすべて OK

$\Rightarrow$  選んだ頂点とつながる変数ガジェット間の辺も OK

# 3SATからVCへの還元

- 残りは変数ガジェット間の辺 + 先ほど選ばなかったリテラルに対応する頂点と変数ガジェット間の辺
  - ⇒ 同じリテラル同士を接続している辺なので、そのリテラルを変数ガジェットから選べば OK

よって、Yes が Yes のまま保存されていることがわかる

# 3SAT から VC への還元

No から No は、対偶を考える.

「還元後のグラフ  $G$  にサイズ  $n+2m$  の頂点被覆があれば、 $\phi$  は充足される」

頂点被覆のために、次の 2 つの条件を守る必要がある

- 各変数ガジェットから少なくとも 1 つの頂点を選ぶ
- 各節ガジェットから少なくとも 2 つの頂点を選ぶ

サイズ  $n+2m$  の頂点被覆を考えるので、各変数ガジェットからちょうど 1 個、各節ガジェットからちょうど 2 個の頂点を選ばないといけないことがわかる

# 3SAT から VC への還元

あとは、変数ガジェットと節ガジェット間をつなげる各辺の端点が被覆されるように変数ガジェットの頂点を選べば、それに対応する 0 / 1 割当が  $\phi$  の充足解になっている

多項式時間還元であることは前述しているので、VC も NP 完全であることがわかる

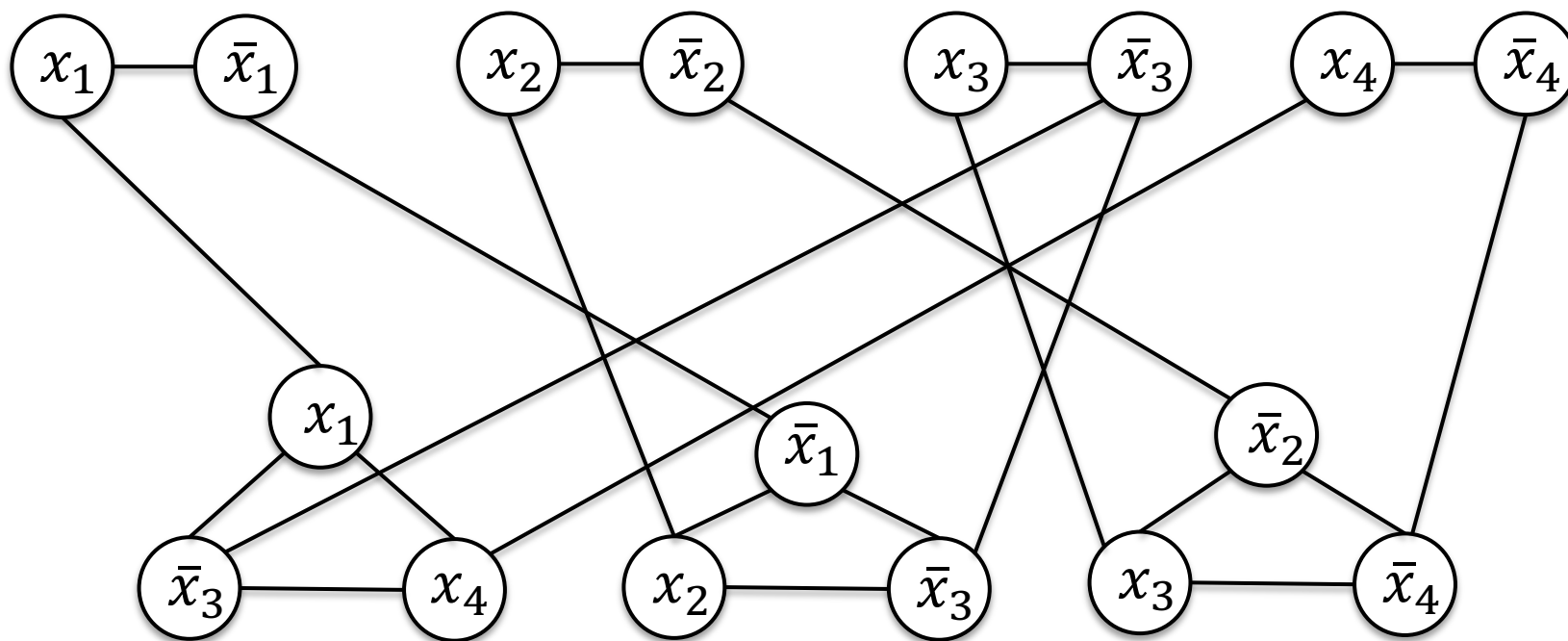
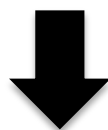
# 練習問題2

次の 3SAT のインスタンスを VC のインスタンスに還元せよ

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$

# 練習問題 2 解答

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$$



# まとめ

## NP 完全問題

- 還元と多項式時間還元
  - ✓ 独立集合問題から頂点被覆問題への還元
- CNF-SAT から 3SAT への多項式時間還元による 3SAT の NP 完全性
- 3SAT から頂点被覆問題への多項式時間還元による頂点被覆問題の NP 完全性

還元に必要なガジェットを考えるのは職人芸だが、パズルの好きな人には向いている（と思う）