大規模知識処理特論

第 10 回

脊戸　和寿

今回の講義内容

論理関数とその表現法について学ぶ

- 論理関数
- 真理値表
- 論理式（和積標準形，積和標準形）
- カルノー図
- 論理回路
- 二分決定木 → 次回
- BDD（二分決定グラフ）→ 次回

論理関数と真理値表

論理関数

論理変数：0（false）と 1（true）の値をとる変数

論理演算：代表例は以下の 4 つ。

- 論理和（OR）：$x \vee y$
- 論理積（AND)：$x \wedge y$
- 否定（NOT）：$\bar{x}$
- 排他的論理和（EXOR，XOR）：$x \oplus y$

n 変数論理関数 $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

真理値表

論理変数への割り当てと出力を 1 対 1 対応させた表

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

真理値表

AND 関数

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR 関数

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

XOR 関数

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOT 関数

x	$\neg x \ (= \bar{x})$
0	1
1	0

論理式

正負のリテラルを論理演算で組み合わせたもの。

論理変数 x に対し， x を正リテラル， $\bar{x}$ を負リテラルという。

（例1） ∧は省略されることが多い.

$$f(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge \bar{x}$$

（例2）

$$g(x,y,z) = \big((x \oplus y) \wedge z\big) \oplus \big((x \vee \bar{y}) \oplus z\big)$$

練習問題1

次の論理式の真理値表を完成させよ。

$$g(x, y, z) = \left((x \oplus y) \wedge z\right) \oplus \left((x \vee \bar{y}) \oplus z\right)$$

x	y	z	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

練習問題1（考え方）

1 つずつ代入して計算する.

例：$x = 0, y = 1, z = 1$ の時,

$$g(0,1,1) = \big((0 \oplus 1) \wedge 1\big) \oplus \big((0 \vee \bar{1}) \oplus 1\big)$$

$$= (1 \wedge 1) \oplus (0 \oplus 1) = 1 \oplus 1 = 0$$

練習問題1（解答）

次の論理式の真理値表を完成させよ。

$$g = \left(\left(x \oplus y\right) \wedge z\right) \oplus \left(\left(x \vee \overline{y}\right) \oplus z\right)$$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

論理式

真理値表から論理式へ

真理値表が与えられた時、どのようにして論理式に変換する？

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

真理値表から論理式へ

真理値表が与えられた時、どのようにして論理式に変換する？

⇒ 積和標準形、和積標準形を利用する。

積和標準形（DNF：Disjunctive Normal Form）

➢ 項（term：リテラルの論理積）を論理和でつないだもの。

$$f(x, y, z) = \bar{x}y \vee x\bar{y}z \vee y$$

和積標準形（CNF：Conjunctive Normal Form）

➢ 節（clause：リテラルの論理和）を論理積でつないだもの。

$$f(x, y, z) = (x \vee z)y\ (\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)$$

積和標準形（DNF）

最小項展開を行うことで得られる。

$$f(x, y, z)$$

$$= \bar{x} \wedge f(0, y, z) \vee x \wedge f(1, y, z)$$

$$= \bar{x}\big(\bar{y} \wedge f(0,0, z) \vee y \wedge f(0, 1, z)\big) \vee x\big(\bar{y} \wedge f(1,0, z) \vee y \wedge f(1, 1, z)\big)$$

$$= \bar{x}\bar{y}\big(\bar{z} \wedge f(0,0,0) \vee z \wedge f(0,0,1)\big) \vee \bar{x}y\big(\bar{z} \wedge f(0,1,0) \vee z \wedge f(0,1,1)\big)$$

$$\vee\, xy\big(\bar{z} \wedge f(1,0,0) \vee z \wedge f(1,0,1)\big) \vee xy\big(\bar{z} \wedge f(1,1,0) \vee z \wedge f(1,1,1)\big)$$

$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z}f(0,0,0) \vee \bar{x}\bar{y}zf(0,0,1) \vee \bar{x}y\bar{z}f(0,1,0) \vee \bar{x}yzf(0,1,1)$$

$$\vee\, x\bar{y}\bar{z}f(1,0,0) \vee x\bar{y}zf(1,0,1) \vee xy\bar{z}f(1,1,0) \vee xyzf(1,1,1)$$

積和標準形

つまり、関数値が 1 になる最小項を OR でつなげばよい.

	x	y	z	f
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	0	0	0	0
$\bar{x}\bar{y}z$	0	0	1	0
$\bar{x}y\bar{z}$	0	1	0	0
$\bar{x}yz$	0	1	1	1
$x\bar{y}\bar{z}$	1	0	0	0
$x\bar{y}z$	1	0	1	1
$xy\bar{z}$	1	1	0	1
xyz	1	1	1	1

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

和積標準形（CNF）

最大項展開を行うことで得られる。

$$f(x, y, z)$$
$$= (x \vee f(0, y, z))(\bar{x} \vee f(1, y, z))$$
$$= \left(x \vee \left(y \vee f(0,0,z)\right)\left(\bar{y} \vee f(0,1,z)\right)\right) \left(\bar{x} \vee \left(y \vee f(1\ 0, z)\right)\left(\bar{y} \vee f(1,1,z)\right)\right)$$
$$= \left(x \vee y \vee f(0,0,z)\right)\left(x \vee \bar{y} \vee f(0,1,z)\right)\left(\bar{x} \vee y \vee f(1\ 0,z)\right)\left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee f(1,1,z)\right)$$
$$= \left(x \vee y \vee z \vee f(0,0,0)\right)\left(x \vee y \vee \bar{z} \vee f(0,0,1)\right)\left(x \vee \bar{y} \vee z \vee f(0,1,0)\right)$$
$$\wedge \left(x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee f(0,1,1)\right)\left(\bar{x} \vee y \vee z \vee f(1\ 0,0)\right)\left(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee f(1\ 0,1)\right)$$
$$\wedge \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee f(1,1,0)\right)\left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee f(1,1,1)\right)$$

和積標準形

つまり、関数値が 0 になる最大項を AND でつなげばよい。

	x	y	z	f
$x \vee y \vee z$	0	0	0	0
$x \vee y \vee \bar{z}$	0	0	1	0
$x \vee \bar{y} \vee z$	0	1	0	0
$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	0	1	1	1
$\bar{x} \vee y \vee z$	1	0	0	0
$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$	1	0	1	1
$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	1	1	0	1
$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	1	1	1	1

$$f(x,y,z) = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)$$

練習問題2

次の真理値表を和積標準形論理式および積和標準形の論理式で表現せよ。

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

練習問題2（解答）

積和標準形論理式

	x	y	z	f
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	0	0	0	1
$\bar{x}\bar{y}z$	0	0	1	0
$\bar{x}y\bar{z}$	0	1	0	0
$\bar{x}yz$	0	1	1	0
$x\bar{y}\bar{z}$	1	0	0	1
$x\bar{y}z$	1	0	1	1
$xy\bar{z}$	1	1	0	1
xyz	1	1	1	0

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

練習問題2（解答）

和積標準形論理式

	x	y	z	f
$x \vee y \vee z$	0	0	0	1
$x \vee y \vee \bar{z}$	0	0	1	0
$x \vee \bar{y} \vee z$	0	1	0	0
$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	0	1	1	0
$\bar{x} \vee y \vee z$	1	0	0	1
$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$	1	0	1	1
$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	1	1	0	1
$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	1	1	1	0

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

カルノー図

カルノー図

全ての入力割当てに対応する論理関数の出力を縦横に並べたもの

- 隣り合う入力割当ては 1 bit だけ異なる。
- 論理回路の簡単化などで利用される。

xy \ zw	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

カルノー図による論理関数の簡単化

隣り合う入力割当てが 1 bit しか異ならないことを利用して

簡単化できる。

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$\bar{x}\bar{y}zw$

$\bar{x}\bar{y}z\bar{w}$

$$\bar{x}\bar{y}zw \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{w}$$

$$= \bar{x}\bar{y}z(w \vee \bar{w}) = \bar{x}\bar{y}z$$

カルノー図による論理関数の簡単化

$xy \backslash zw$	00	01	1$\boxed{1}$	1$\boxed{0}$
00	0	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

w に関する部分のみが異なる。

⇒ $\bar{x}\bar{y}z$ は共通

⇒ 2 つの項をまとめることが可能

同様の考え方で、隣り合う 2^k 個（k=1,2,⋯）の項をまとめることが可能。

カルノー図による論理関数の簡単化

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

zw

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

xw

カルノー図による論理関数の簡単化

xy \ zw	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$\bar{x}\bar{y}z$

zw

xw

$$\bar{x}\bar{y}zw \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{w} \vee xy\bar{z}w \vee xyzw \vee x\bar{y}\bar{z}w \vee x\bar{y}zw$$
$$= \bar{x}\bar{y}z \vee xw \vee zw$$

カルノー図による論理関数の簡単化

簡単化で注意すること。

- できるだけ大きな長方形で 1 をまとめる.
- 長方形を重複させることは可能だが無駄な重複をしない。

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

無駄な重複

練習問題3

次の関数をカルノー図を利用して簡単化せよ。

$$f(x, y, z, w) = xyzw \vee xy\bar{z}w \vee xyz\overline{w} \vee xy\bar{z}\overline{w}$$
$$\vee\ \bar{x}yz\overline{w} \vee \bar{x}y\bar{z}\overline{w} \vee \bar{x}\bar{y}z\overline{w} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\overline{w}$$

xy \ zw	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

練習問題3（解答）

まず、関数を元にカルノー図の 0/1 を埋める。

$$f(x,y,z,w) = xyzw \vee xy\bar{z}w \vee xyz\bar{w} \vee xy\bar{z}\bar{w} \\ \vee \bar{x}yz\bar{w} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$$

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

練習問題3（解答）

カルノー図をもとに簡単化

- 上下の端、左右の端もつながっていることに注意。

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$\bar{x}\bar{w}$

xy

$$f(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{w} \vee xy$$

論理回路

論理回路

論理回路

- 0/1 の 2 値を扱う回路。論理素子を構成される。

組合せ回路

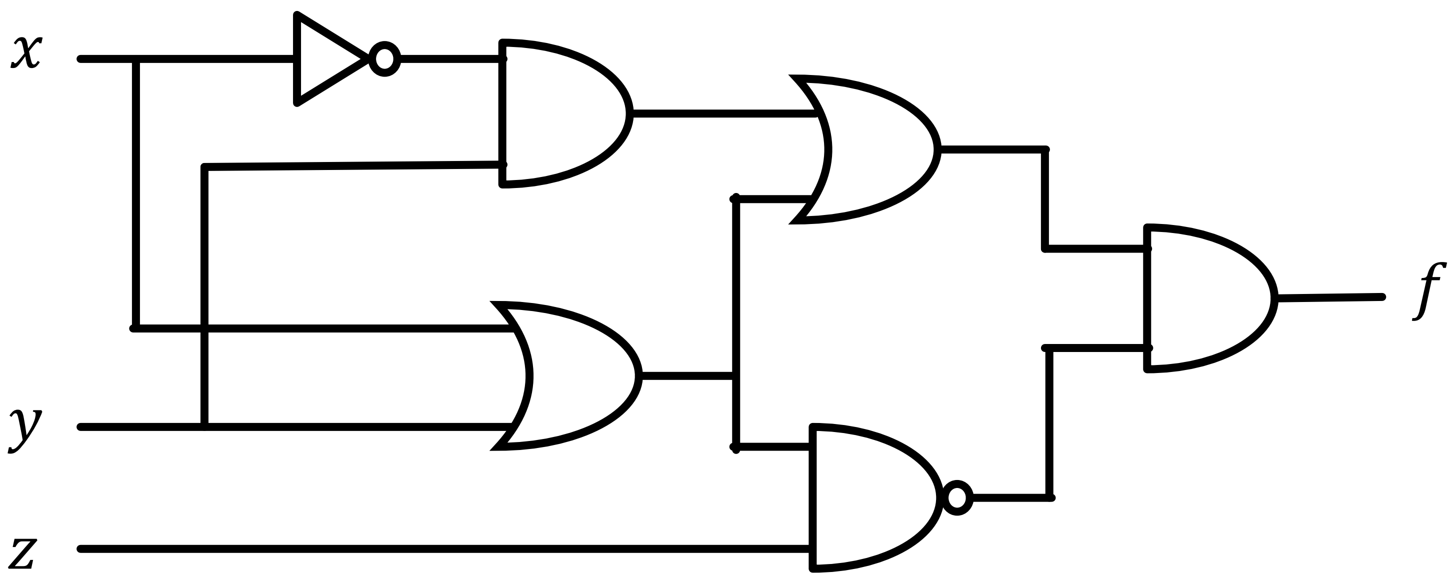
- 過去の入力に依存しない。論理関数を表現可能。

順序回路

- 過去の入力を利用できる回路。フリップフロップという記憶素子を利用する。

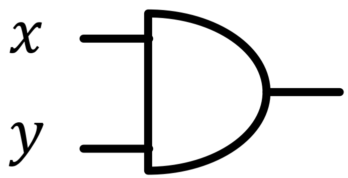
論理回路の例

$$f = \left((\bar{x} \wedge y) \vee (x \vee y)\right) \wedge \left(\overline{(x \vee y) \wedge z}\right)$$

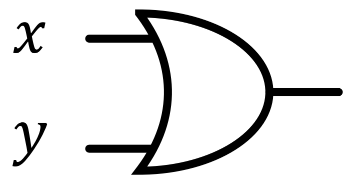


論理素子

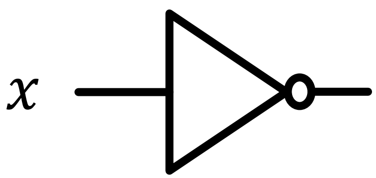
論理回路に使用される代表的な論理素子



AND 素子



OR 素子



NOT 素子

x	y	$x \land y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \lor y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	$\neg x\ (= \bar{x})$
0	1
1	0

完備性（ Completeness ）

完備集合（ Complete Set ）

- 任意の論理関数をある素子集合の組合せ論理回路で表現できる時、その素子集合を「完備集合」という。
- ある素子集合が完備集合であるとき、完備性を満たすという。

完備集合の例

- AND、OR、NOT
- NAND（ AND の否定 ）

x	y	$\overline{x \wedge y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

完備性（Completeness）

AND、OR、NOT の素子集合がなぜ完備性を満たすのか？

- 任意の論理関数は積和標準形（ DNF ）または和積標準形（ CNF ）で表現可。
- DNF と CNF は、AND、OR、NOT のみを使用した論理回路で表現可能.

NAND はなぜ完備性を満たすのか？

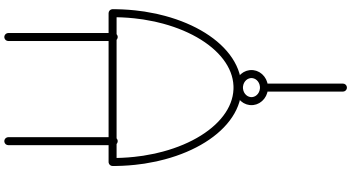
- NAND のみで，AND、OR、NOT 素子と等価な素子を作成可能。

練習問題4

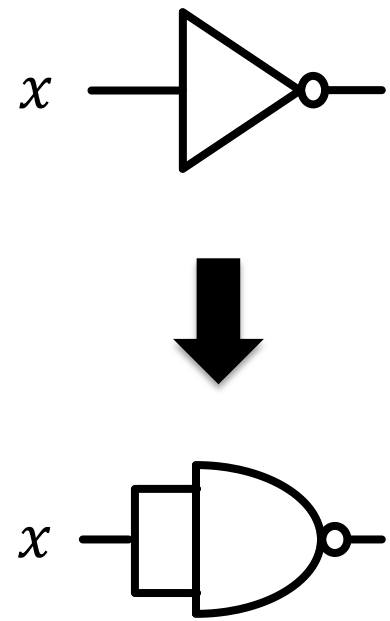
NOT 素子は下記のように NAND 素子のみで表すことができる。

AND 素子，OR 素子をそれぞれ NAND 素子のみで表せ。

NAND 素子



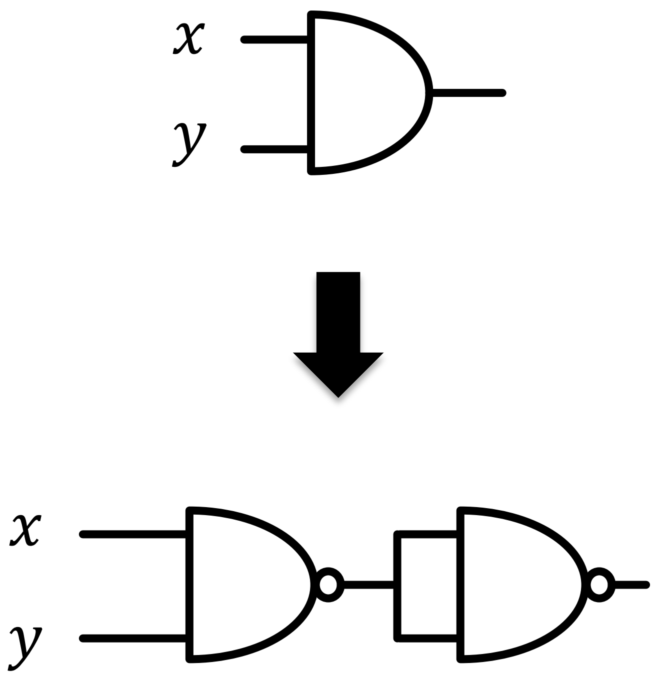
x	y	$\overline{x \wedge y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

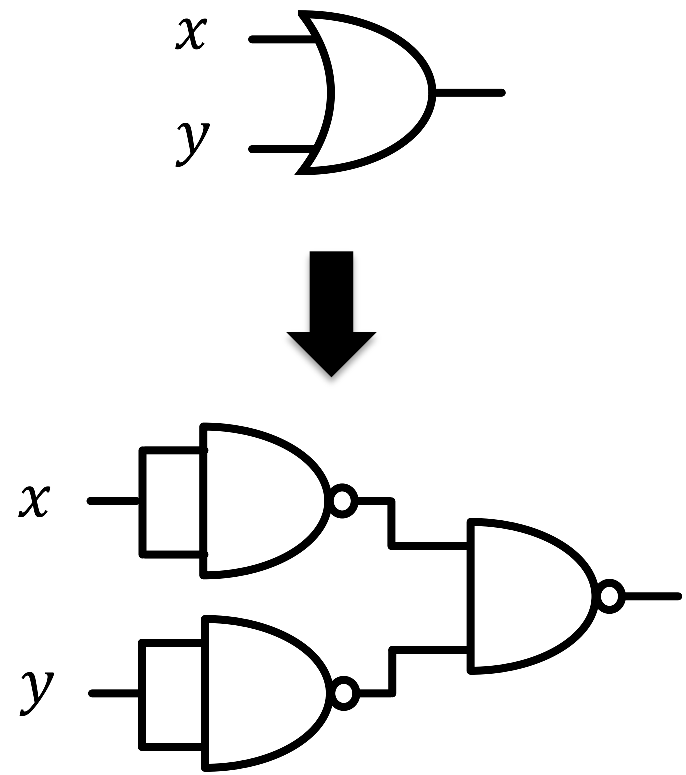


練習問題4（解答）

AND は NAND の否定なので、簡単。

OR はド・モルガンを使って、$x \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$ と変換する。





まとめ

論理関数とその表現法の一部を紹介

- 論理関数
- 真理値表
- 論理式（和積標準形，積和標準形）
- カルノー図
- 論理回路