大規模知識処理特論

第 11 回

脊戸　和寿

今回の講義内容

論理関数とその表現法について学ぶ

- 論理関数
- 真理値表
- 論理式（和積標準形，積和標準形）
- カルノー図
- 論理回路
- 二分決定木
- 二分決定グラフ（BDD）

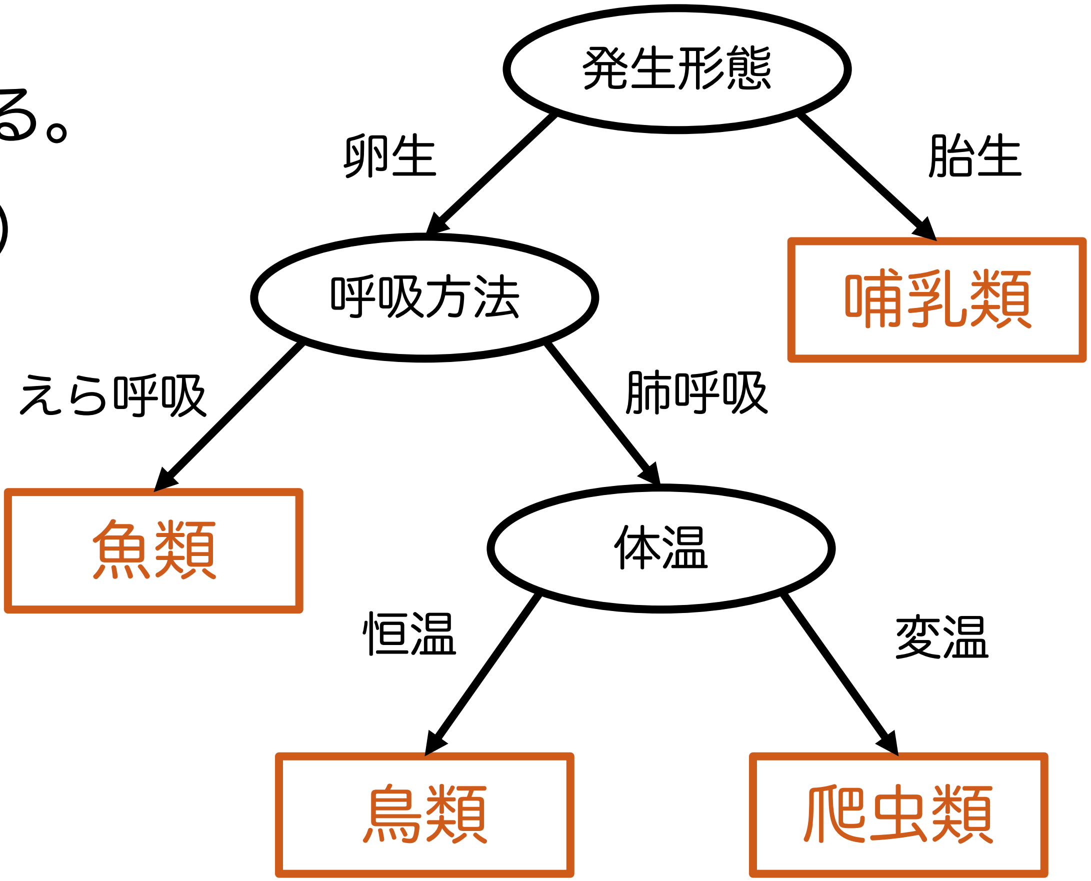
二分決定木（1）

決定木

説明変数による分類を木状に繰り返すことで事象を説明する。

機械学習にも利用される。

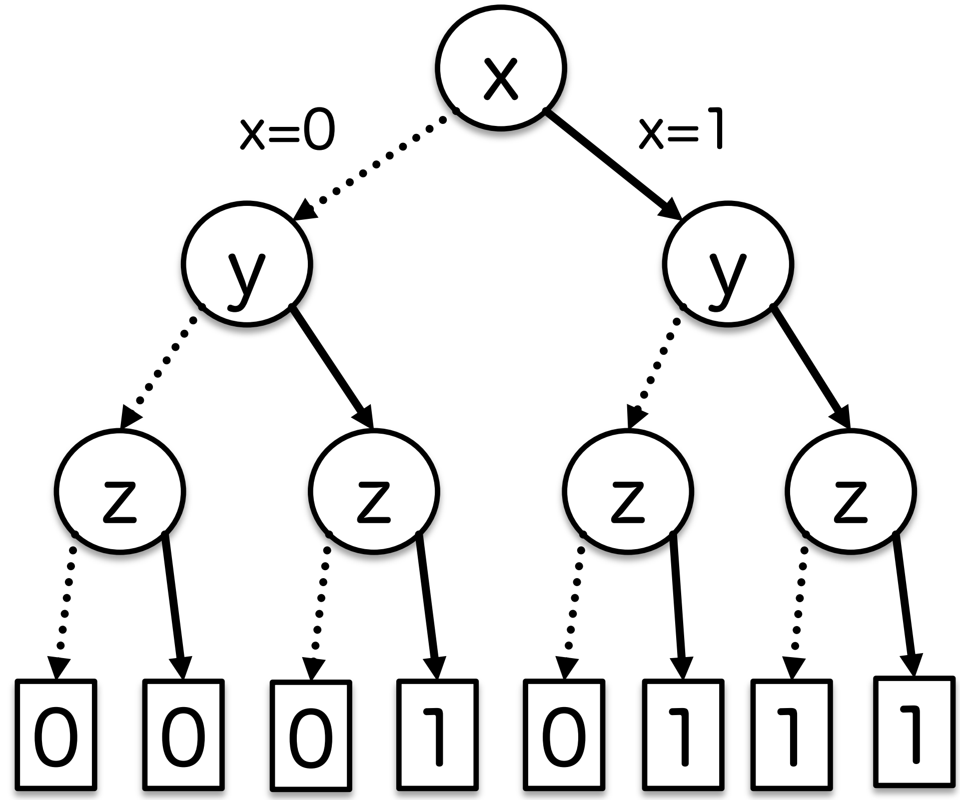
- データ（正例と負例）から決定木を作成



真理値表と二分決定木

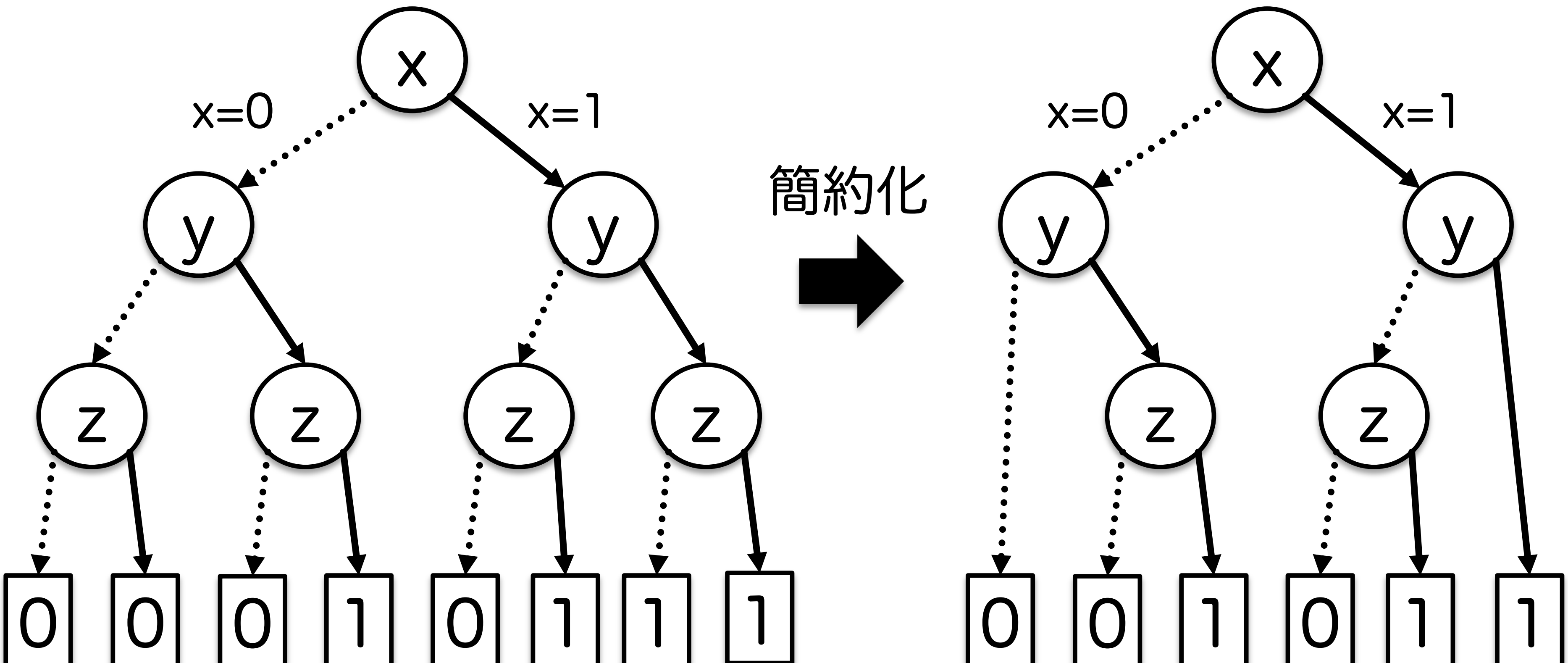
真理値表から二分決定木は簡単に作成できる。

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



二分決定木

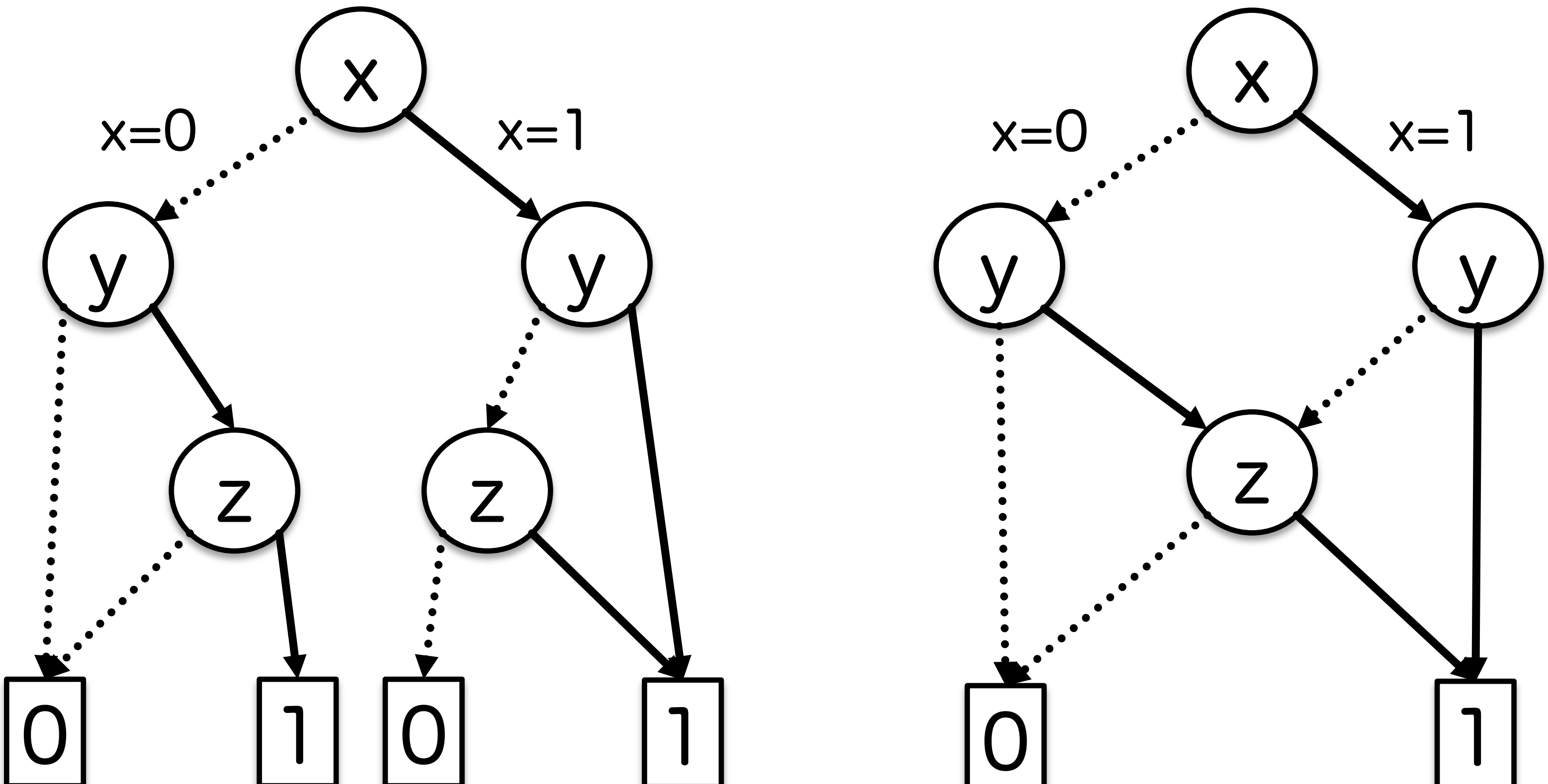
二分決定木は簡約化できることがある



二分決定木

決定木は木構造を保つ必要がある

➢ 下記の 2 つは左右ともに木ではない



練習問題 1

3変数 AND 関数，OR 関数の二分決定木を作成し，簡約化せよ

- 真理値表は下記

AND関数

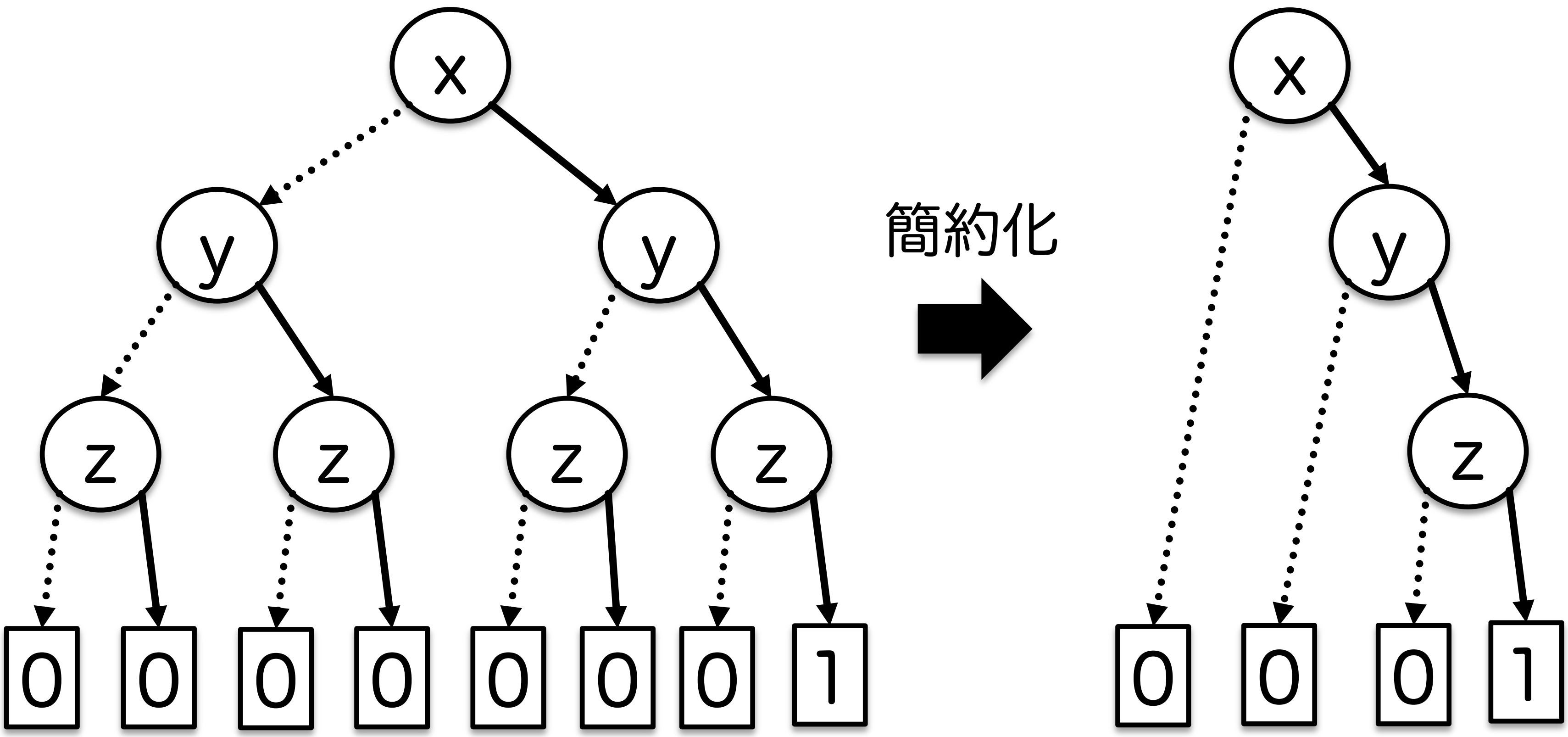
x	y	z	$x \wedge y \wedge z$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

OR関数

x	y	z	$x \vee y \vee z$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

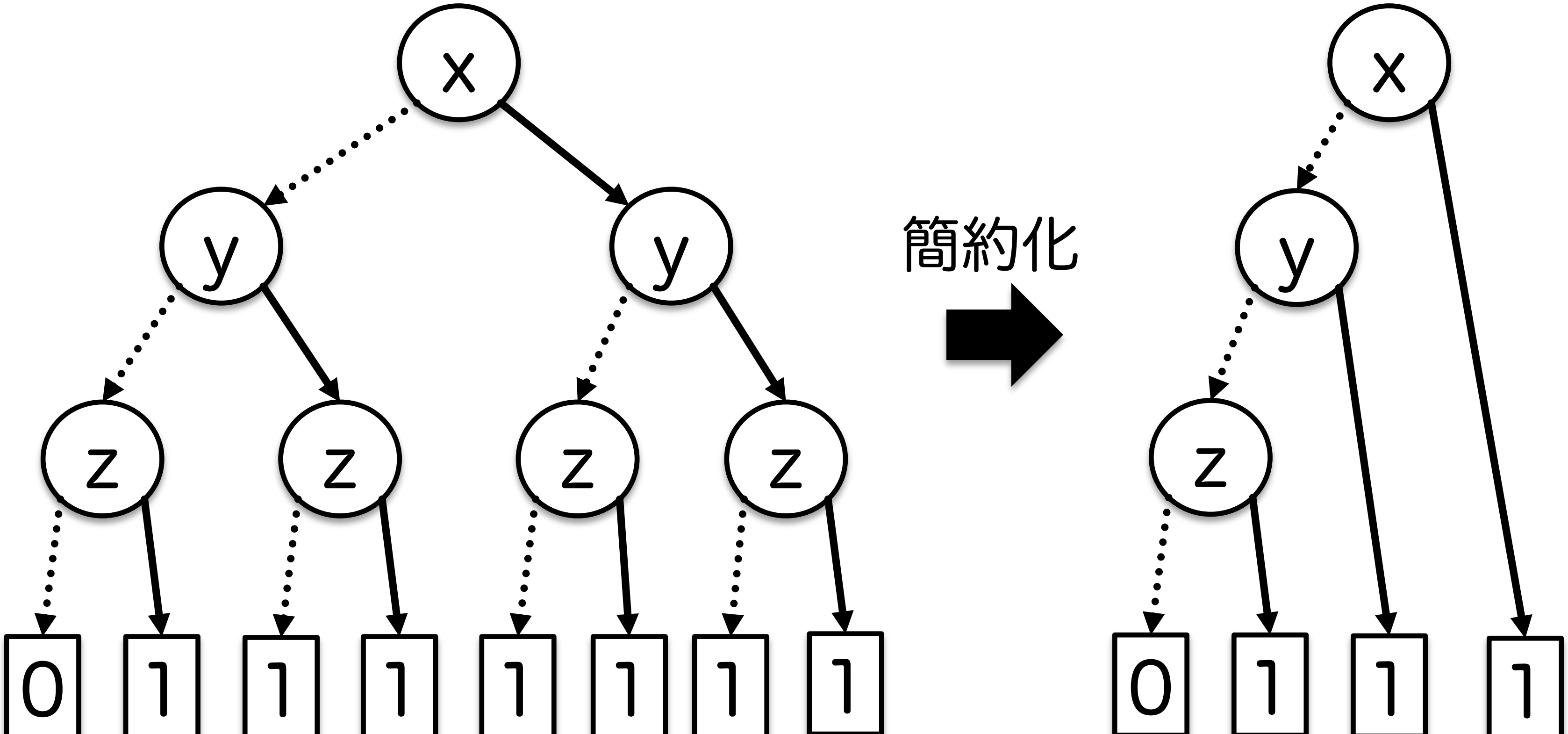
練習問題1（解答）

AND 関数



練習問題1（解答）

OR 関数

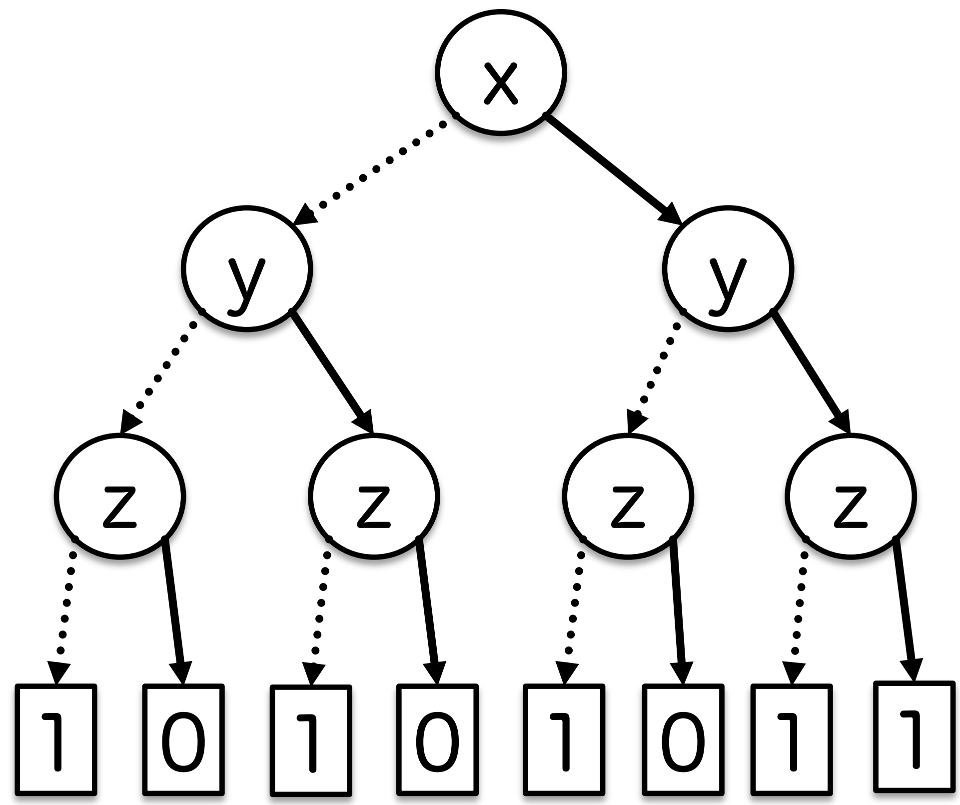


二分決定木（2）

変数順序による決定木の変化

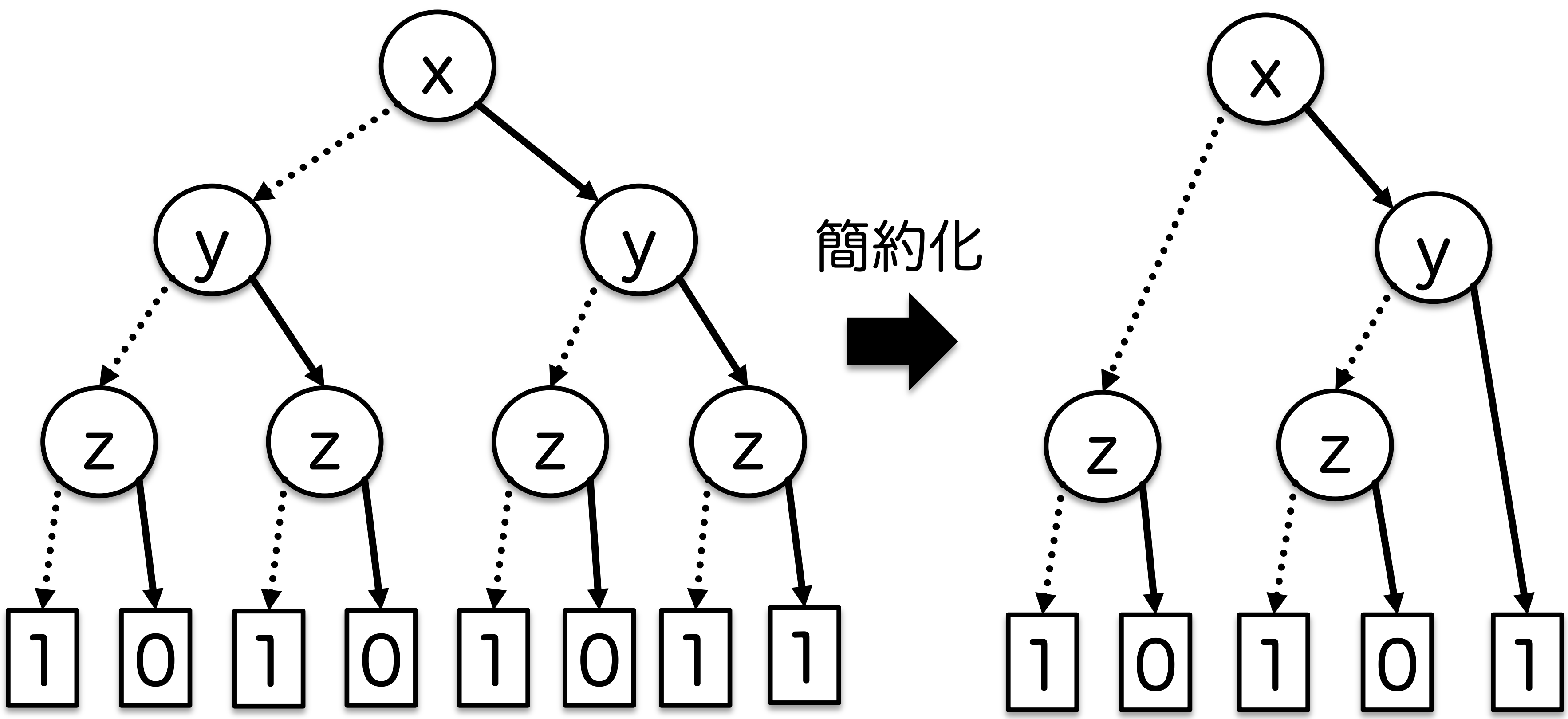
下記の真理値表を x, y, z の順に値を確認する決定木

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



変数順序による決定木の変化

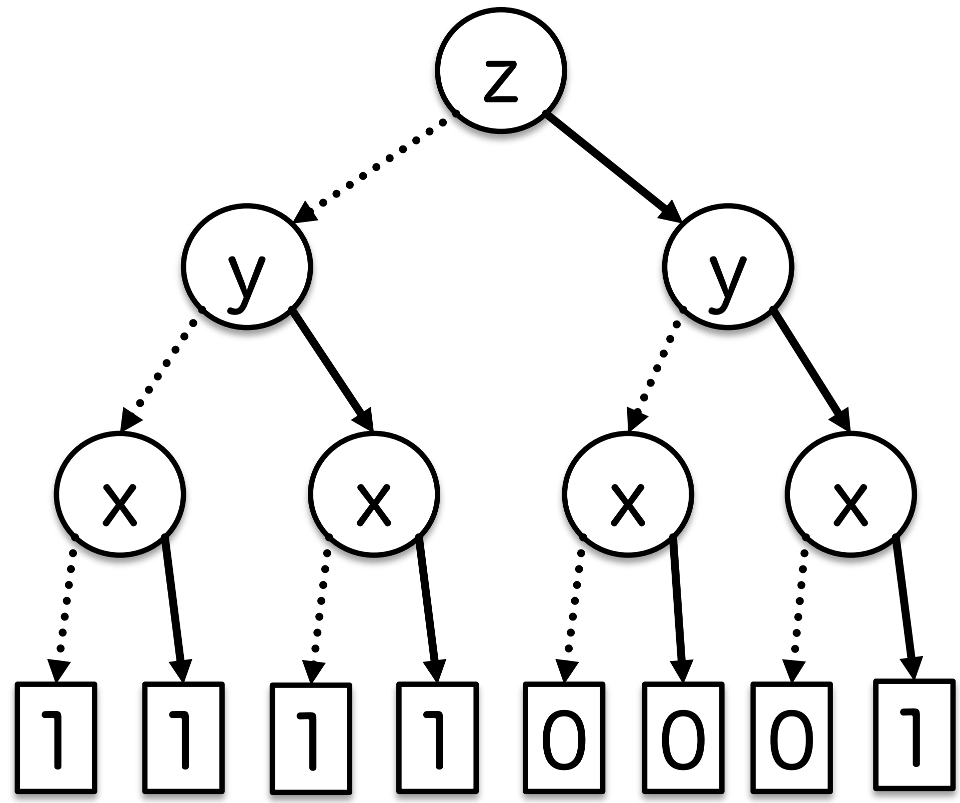
簡約化する



変数順序による決定木の変化

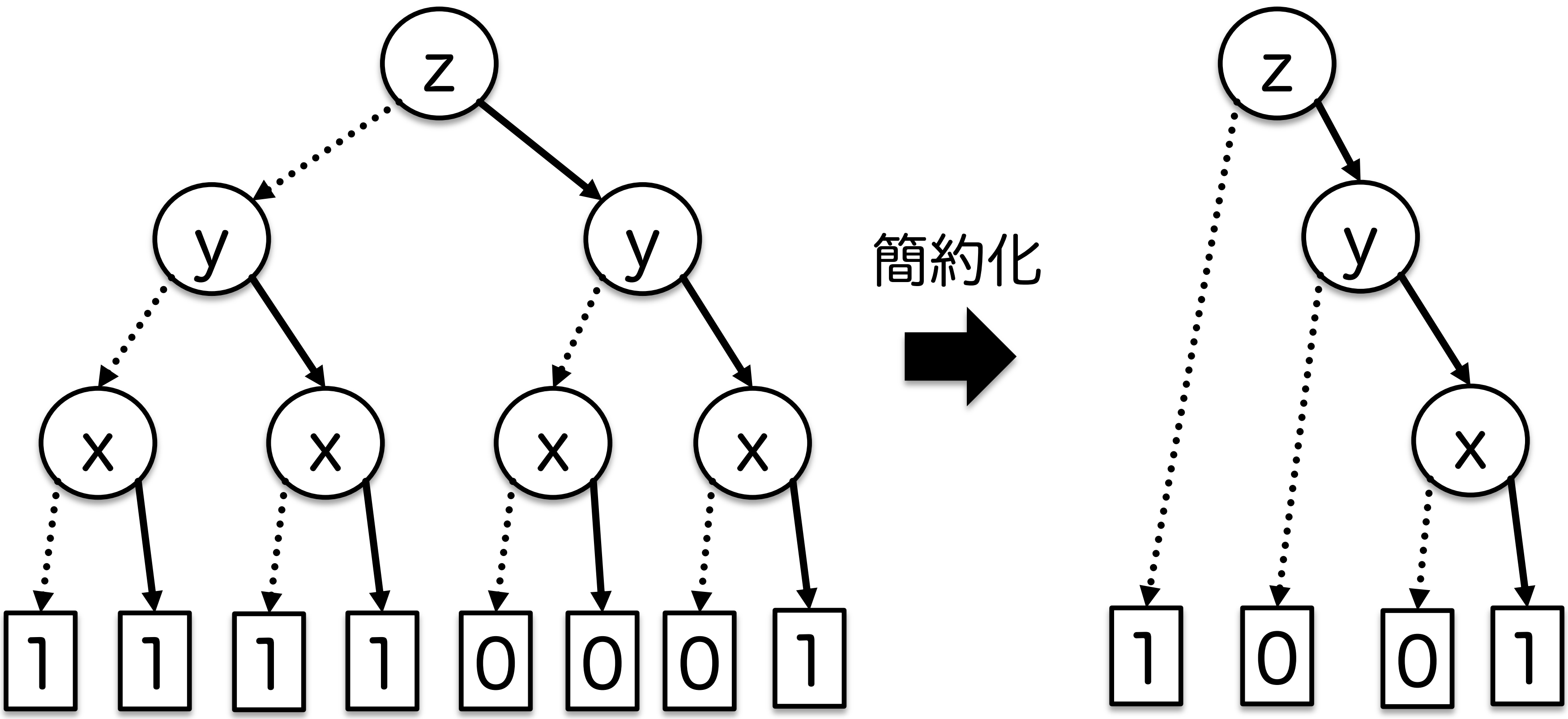
同じ真理値表を z、y、x の順に値を確認する決定木

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



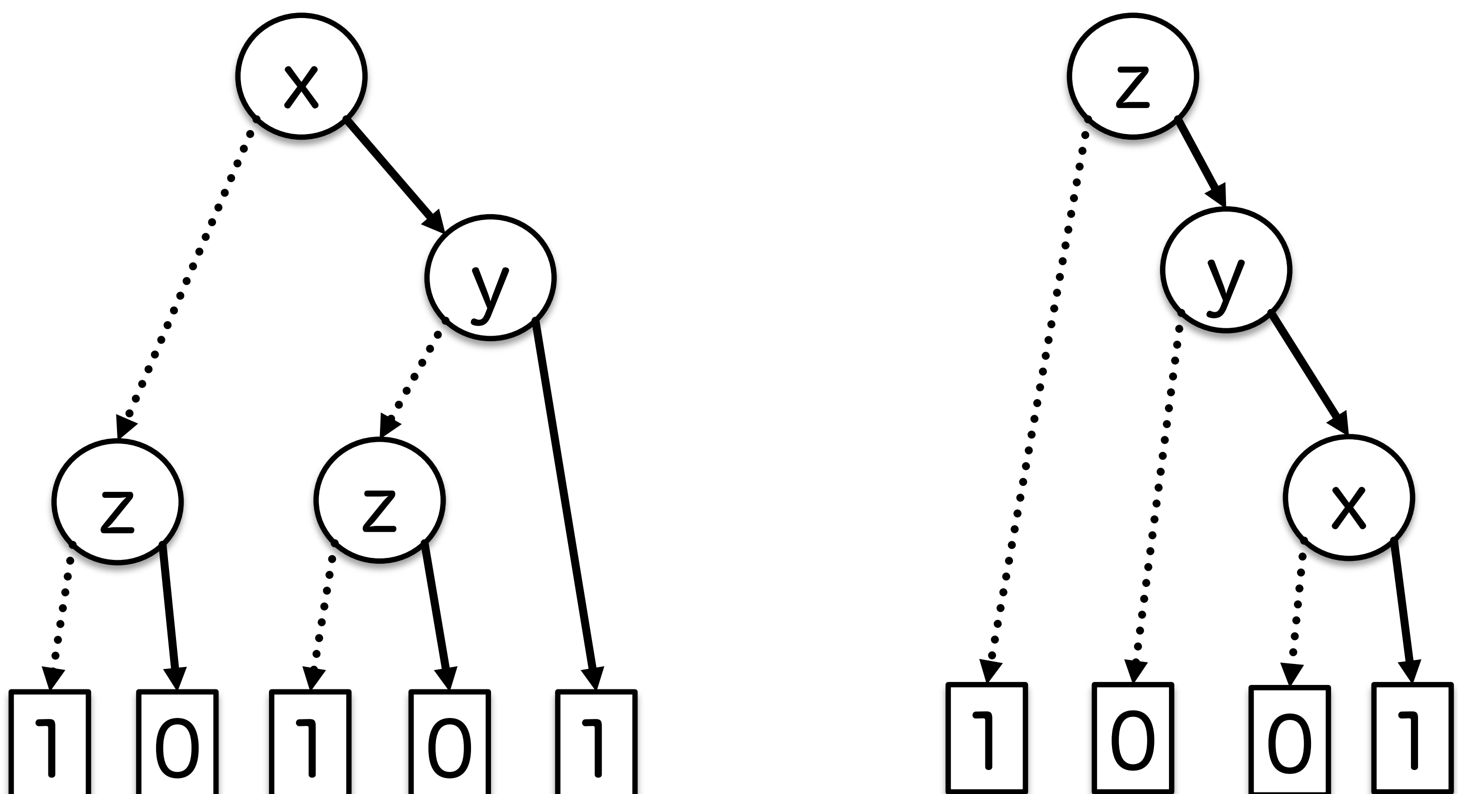
変数順序による決定木の変化

簡約化する



変数順序による決定木の変化

同じ関数を表す決定木だが、サイズが異なる



変数順序による決定木の変化

前述の例のように変数を読む順序によって決定木は変わる

- 出来るだけコンパクトな決定木を構成ことは重要
  - ✓ メモリの節約
- コンパクトな決定木を構成することは簡単ではない
  - ✓ 最適な変数順序をどう決める？？

練習問題2

下記は論理関数 f を表す真理値表である。

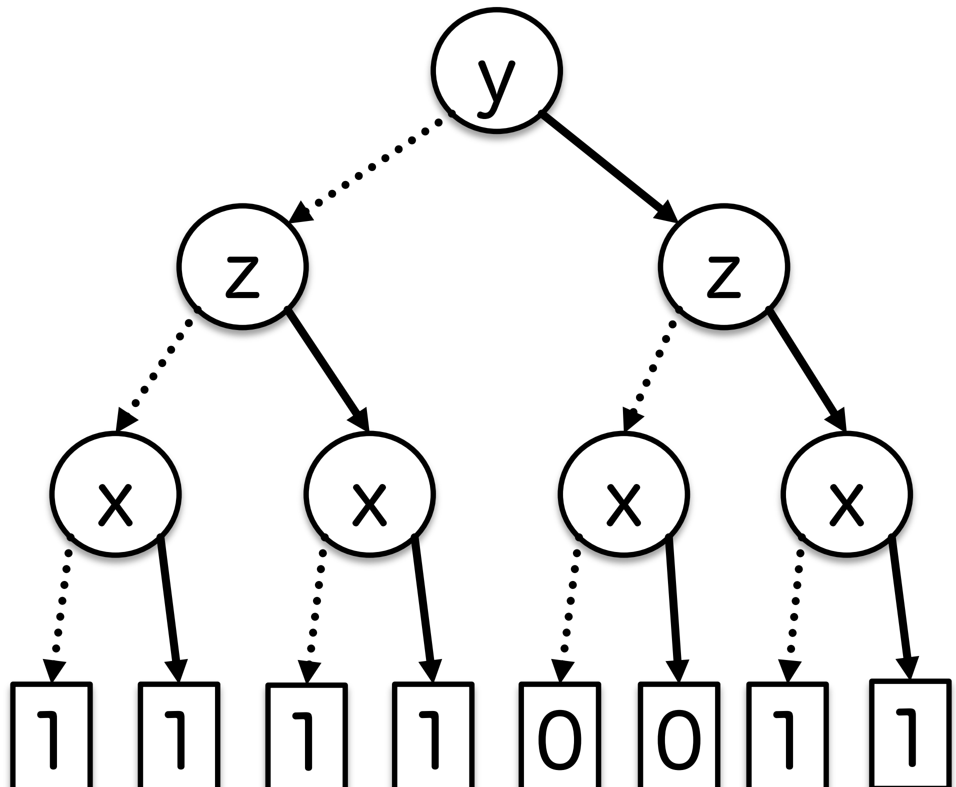
f を表す出来るだけコンパクトな二分決定木を求めよ。

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

練習問題2（解答）

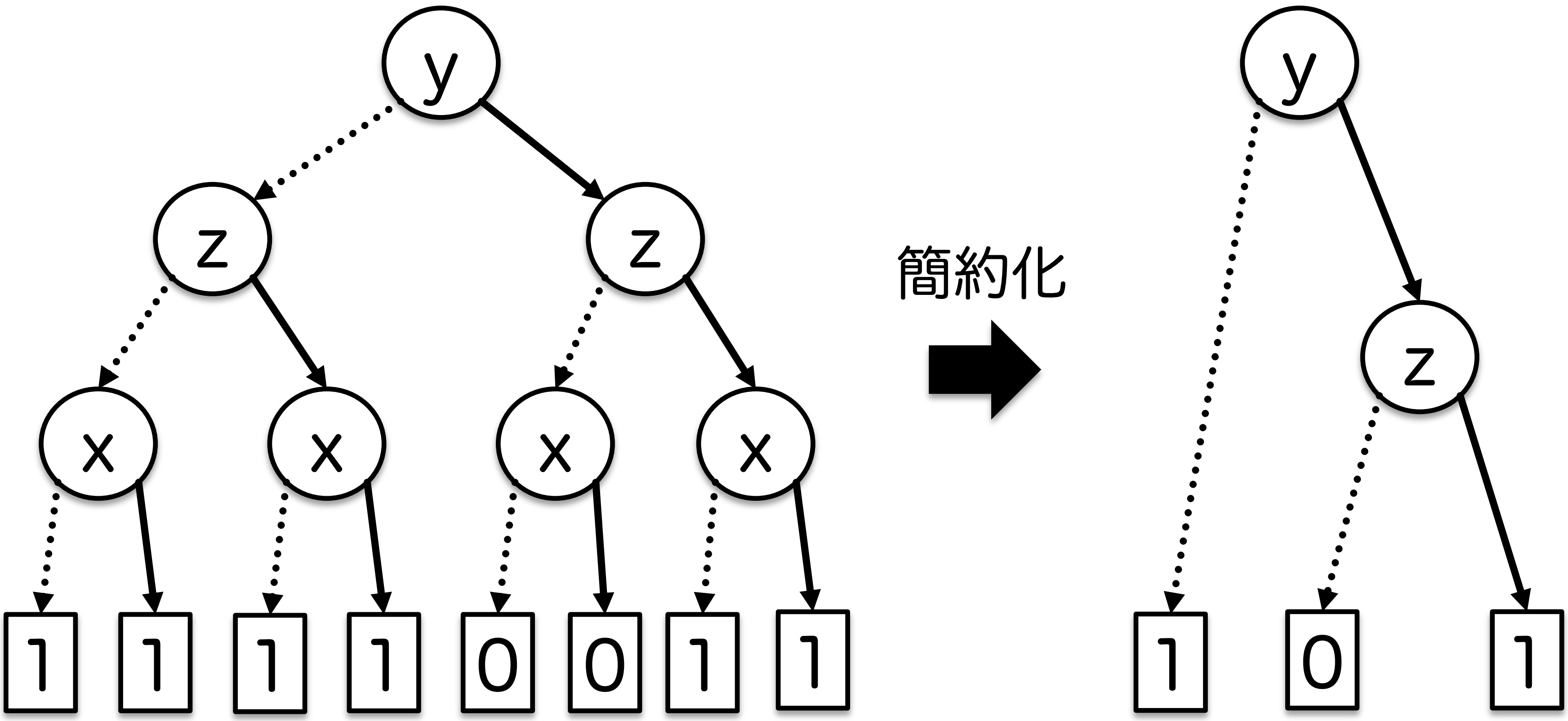
y, z, x の順に変数の値を確認する決定木を作成する。

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



練習問題2（解答）

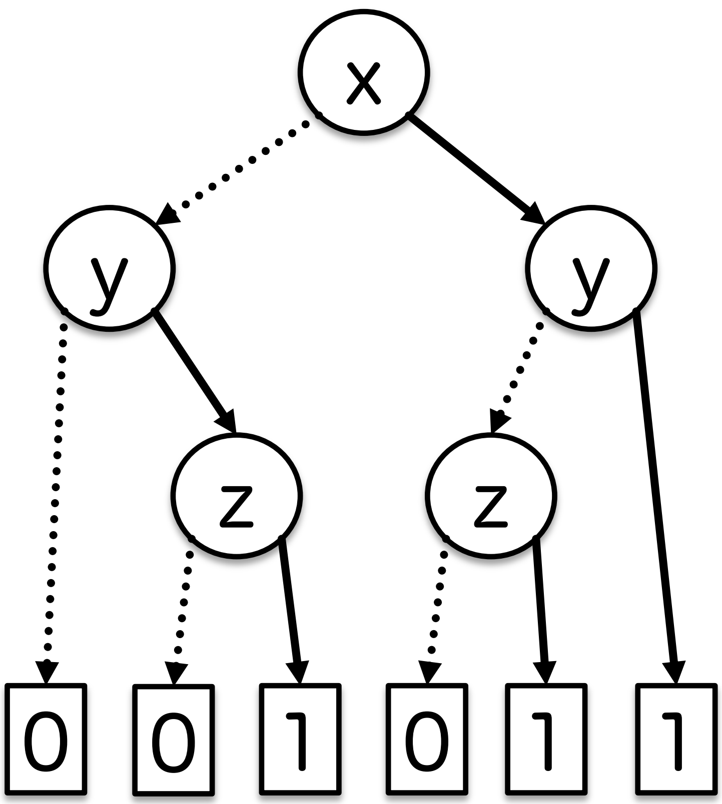
作成した決定木を簡約化する。



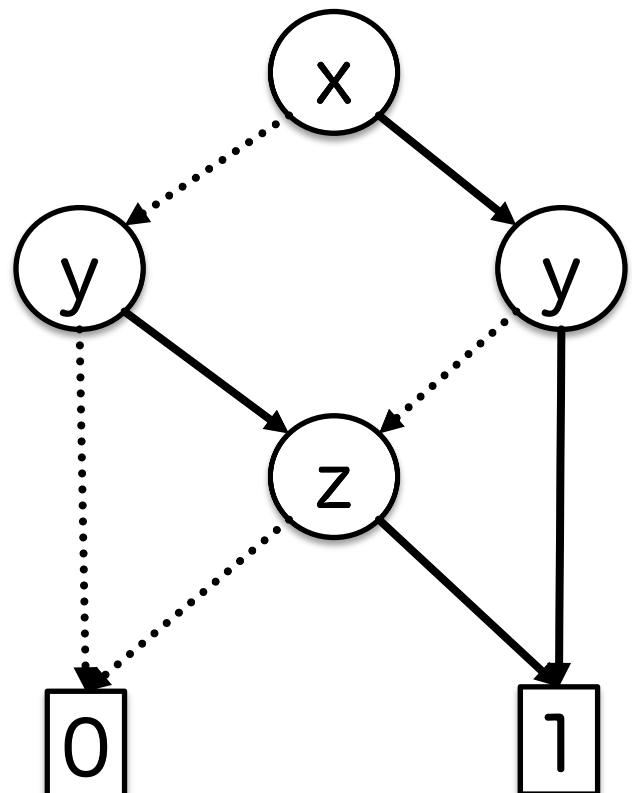
二分決定グラフ（1）
Binary Decision Diagram：BDD

BDD（二分決定グラフ）

二分決定木とは異なり、「有向非巡回グラフ」で表現



二分決定木



BDD

BDD（二分決定グラフ）

BDD は下記を満たす

- 定数節点（0,1）と変数節点から構成される
- 有向非巡回グラフである
- 定数節点から出る枝はない
- 変数節点からは、0-枝と1-枝のちょうど 2 本の枝が出る
- 変数節点のうち 1 つは、次数が 0 の根節点である
- BDD のサイズは、節点の数で定義される

BDDの特徴

多くの実用的な論理関数を「コンパクト」に表現可能

変数順序が定まると表現が「一意」に定まる

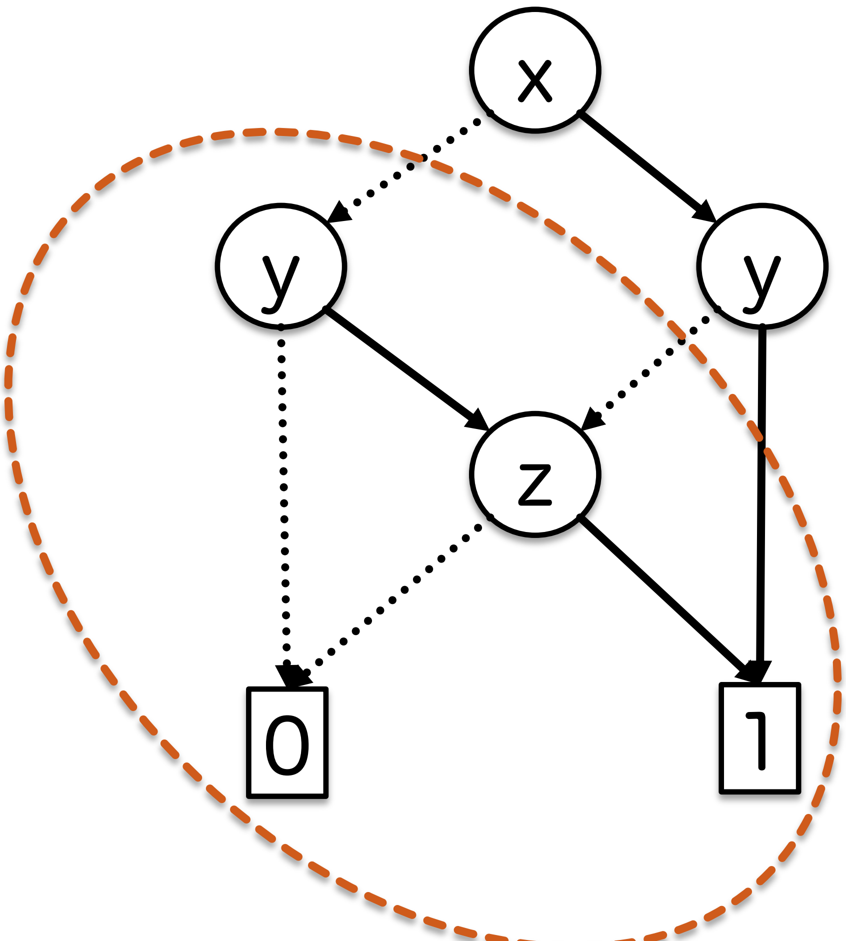
BDD に対する効率な演算がある [Bryant 1986]

部分グラフが、もとの論理関数の部分論理関数を表す

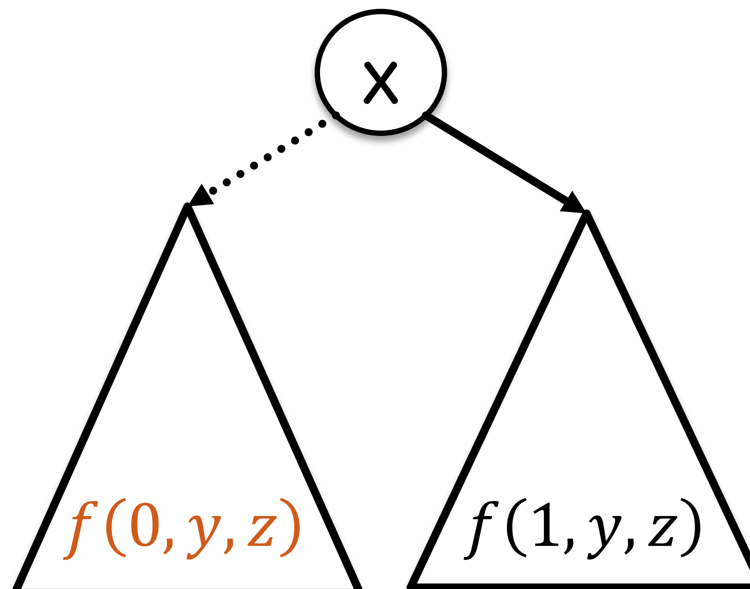
近年、さまざまな分野に応用されている

BDD の特徴

部分グラフが、もとの論理関数の部分論理関数を表す

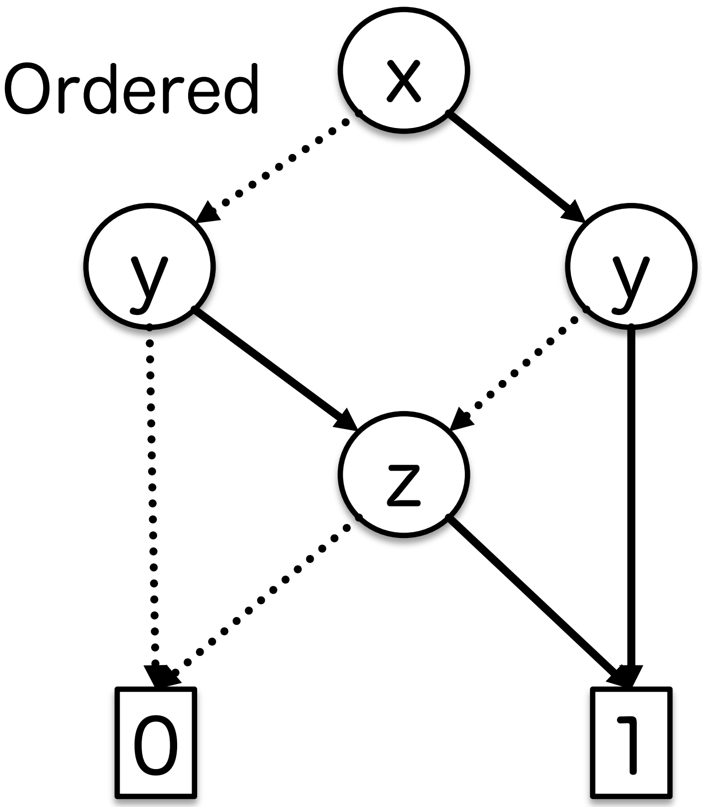


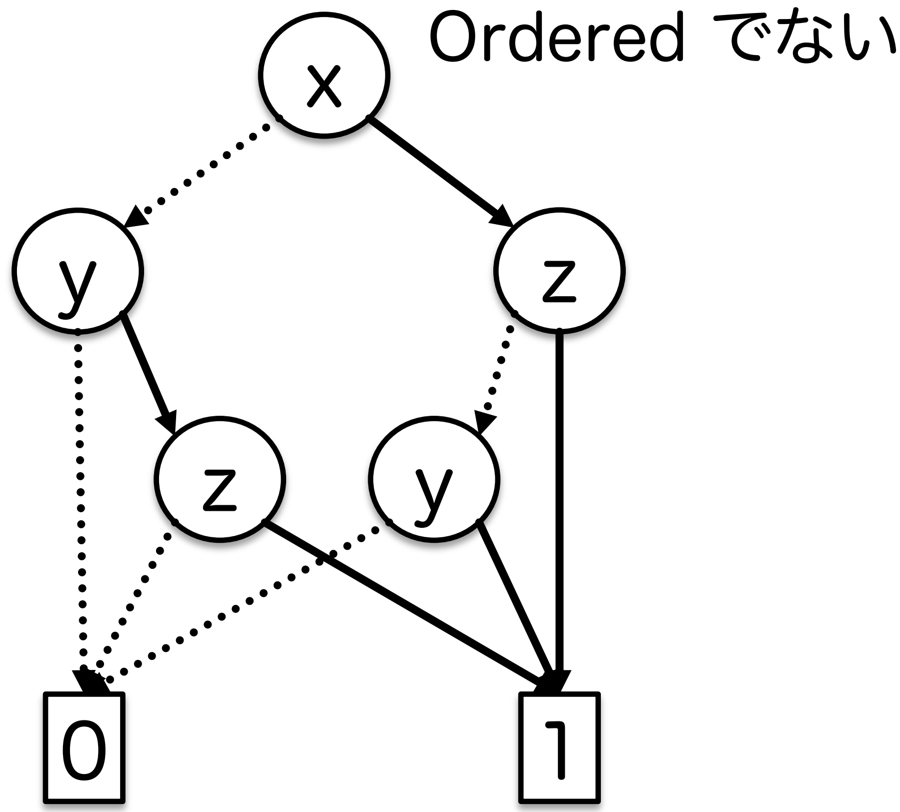
$$\bar{x}(yz) \vee x(\bar{y}z \vee y)$$
$$= \bar{x}f(0,y,z) \vee xf(1,y,z)$$



OBDD（Ordered BDD）

変数順序：全順序関係に従って、変数が出現



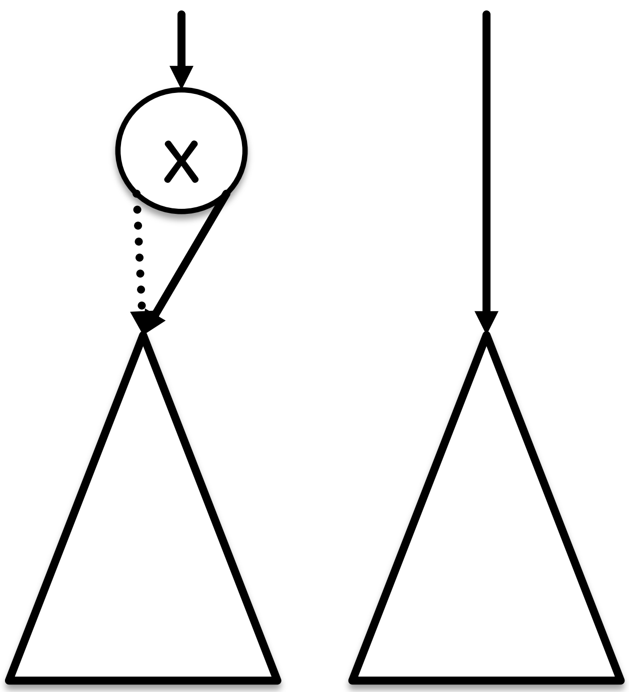


Ordered はサイズが大きくなる傾向にあるが、扱いやすい

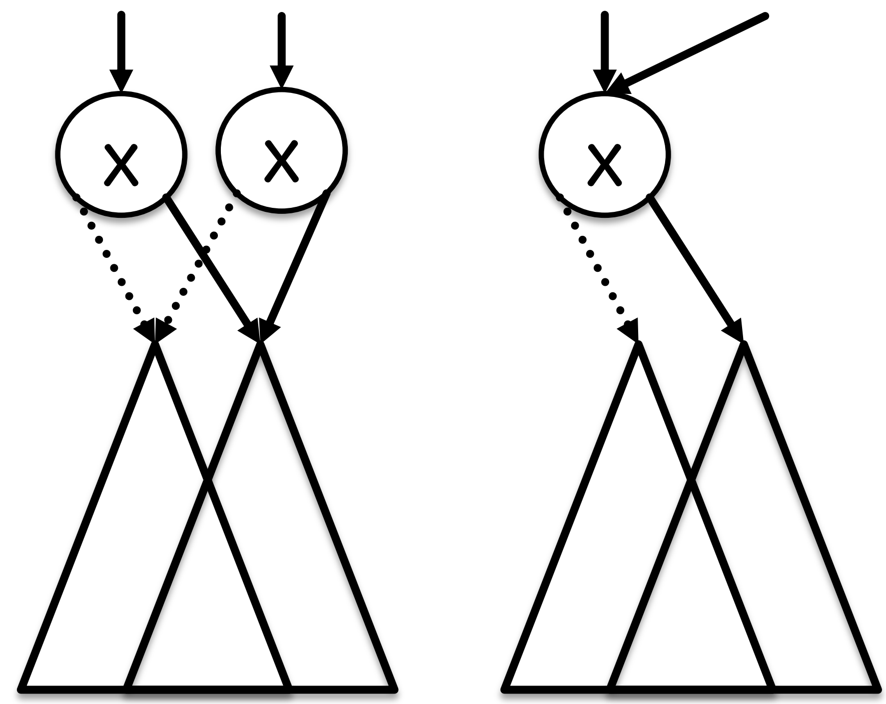
ROBDD（Reduced Ordered BDD）

BDD に 2 つの簡約化規則を適用

冗長な接点の削除



等価な接点の削除



講義では，ROBDD を扱う（単に BDD と呼ぶ）

練習問題 3

次のそれぞれの関数を BDD であらわせ

(1) $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$

(2) $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$

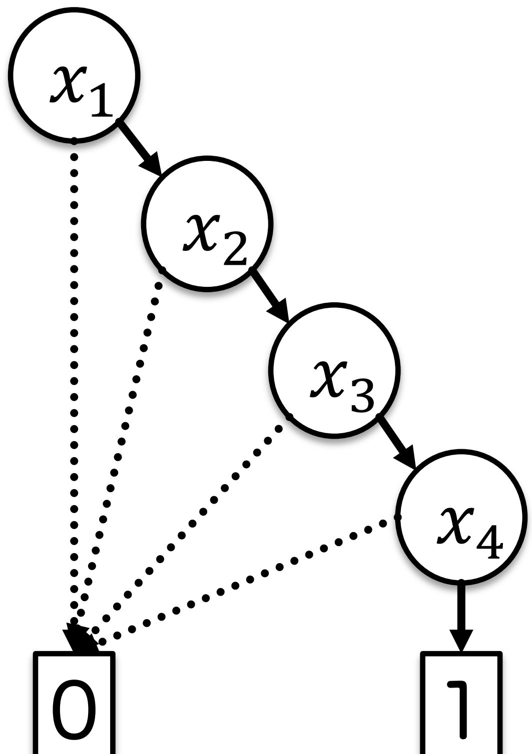
(3) $(x_1 \vee x_2) \wedge x_3$

(4) $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$

練習問題 3（解答）

次のそれぞれの関数を BDD であらわせ

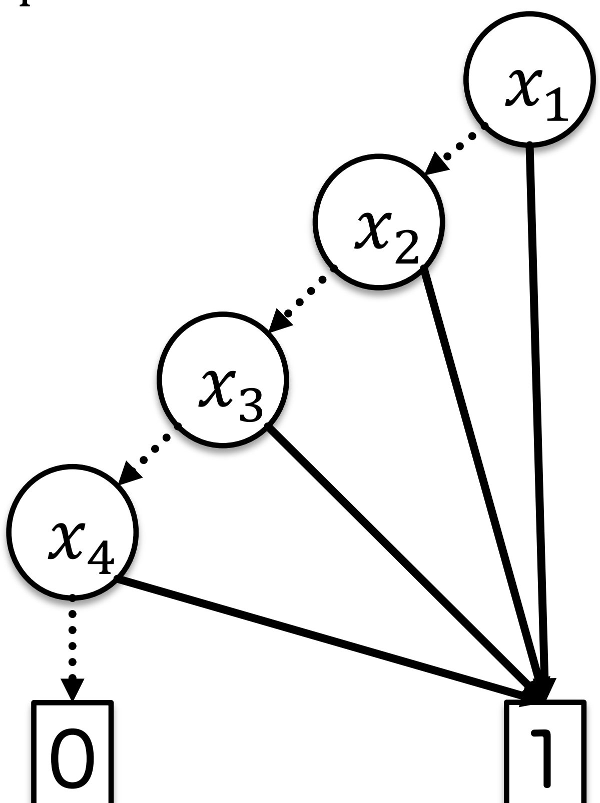
(1) $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$



練習問題 3（解答）

次のそれぞれの関数を BDD であらわせ

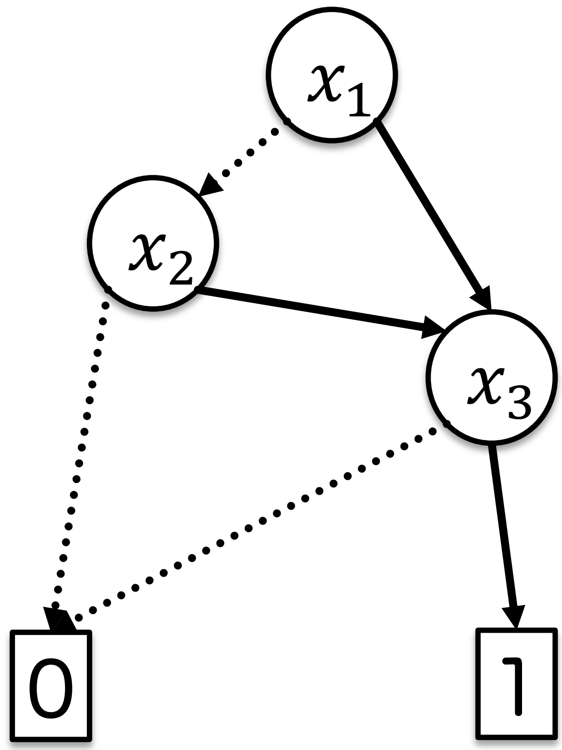
(2) $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$



練習問題 3（解答）

次のそれぞれの関数を BDD であらわせ

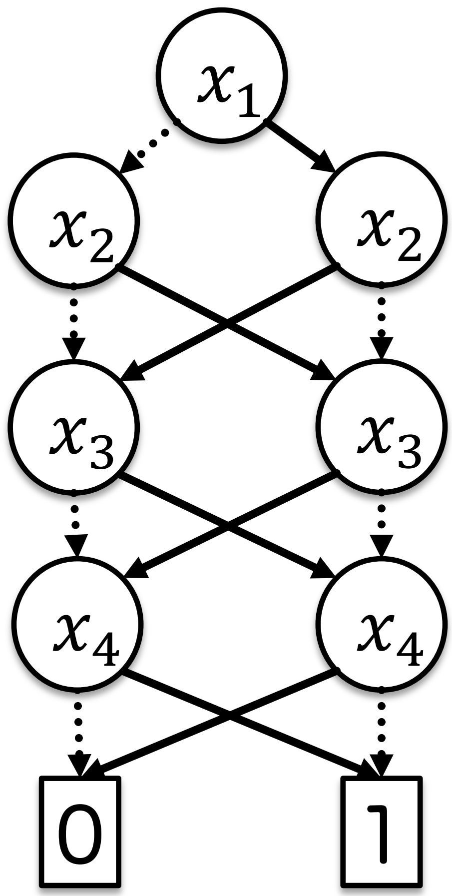
(3) $(x_1 \lor x_2) \land x_3$



練習問題 3（解答）

次のそれぞれの関数を BDD であらわせ

(4) $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$



二分決定グラフ（2）
Binary Decision Diagram：BDD

変数順序による BDD の変化

決定木と同様に変数を読む順序によって BDD の形は変わる.

どんな論理関数も BDD でコンパクトに表現できる？

- 任意の変数順序でサイズが小さい → 嬉しい！
- どんな変数順序でも、サイズが大きい → 辛い…
- ある変数順序で、サイズが小さい。
  - ✓ よい変数順序を求めることが重要
  - ✓ 最適な変数順序を求める → NP完全 [Tani, et al 1993]

任意の変数順序でサイズが小さい例

次の表内の関数は変数順序を変えてもサイズは変わらない

関数	BDD のサイズ
論理積（ AND ）	O(n)
論理和（ OR ）	O(n)
排他的論理和（ EXOR ）	O(n)
多数決関数	$O(n^2)$
対称論理関数	$O(n^2)$

※ 対称論理関数とは，入力変数内の1の個数のみで出力がきまる関数.

どんな変数順序でもサイズが大きい例

どの変数順序でも BDD のサイズが大きくなる例がある

- 算術乗算 [Bryant 1991]：$\Omega(2^{n/5})$
- 算術除算 [Horiyama, Yajima 1998]：$\Omega(2^{n/8})$
- ランダムな関数

ある変数順序で、サイズが小さい例

例： $x_1 y_1 \vee x_2 y_2$

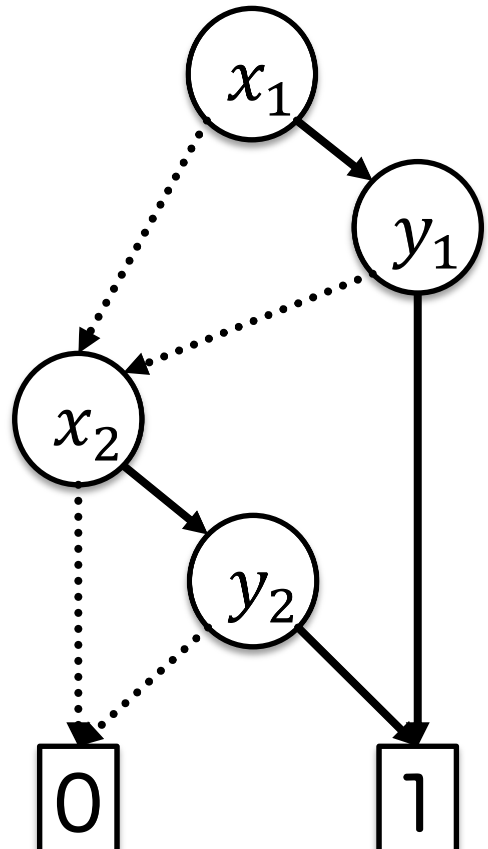
次の 2 つの変数順序を考える.

- x_1, y_1, x_2, y_2
- x_1, x_2, y_1, y_2

ある変数順序で、サイズが小さい例

例： $x_1 y_1 \vee x_2 y_2$

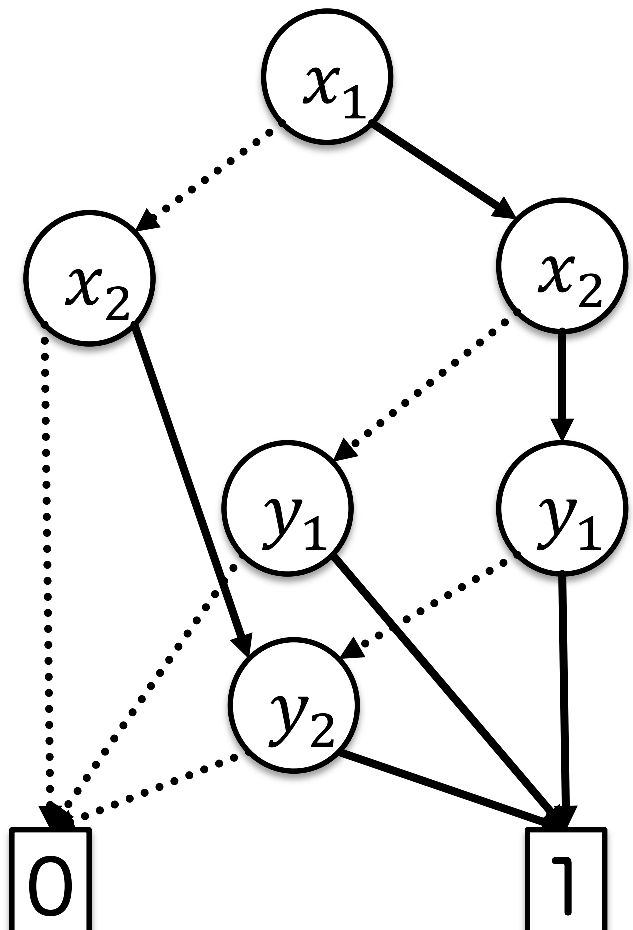
- x_1，y_1，x_2，y_2



ある変数順序で、サイズが小さい例

例： $x_1 y_1 \lor x_2 y_2$

- x_1, x_2, y_1, y_2

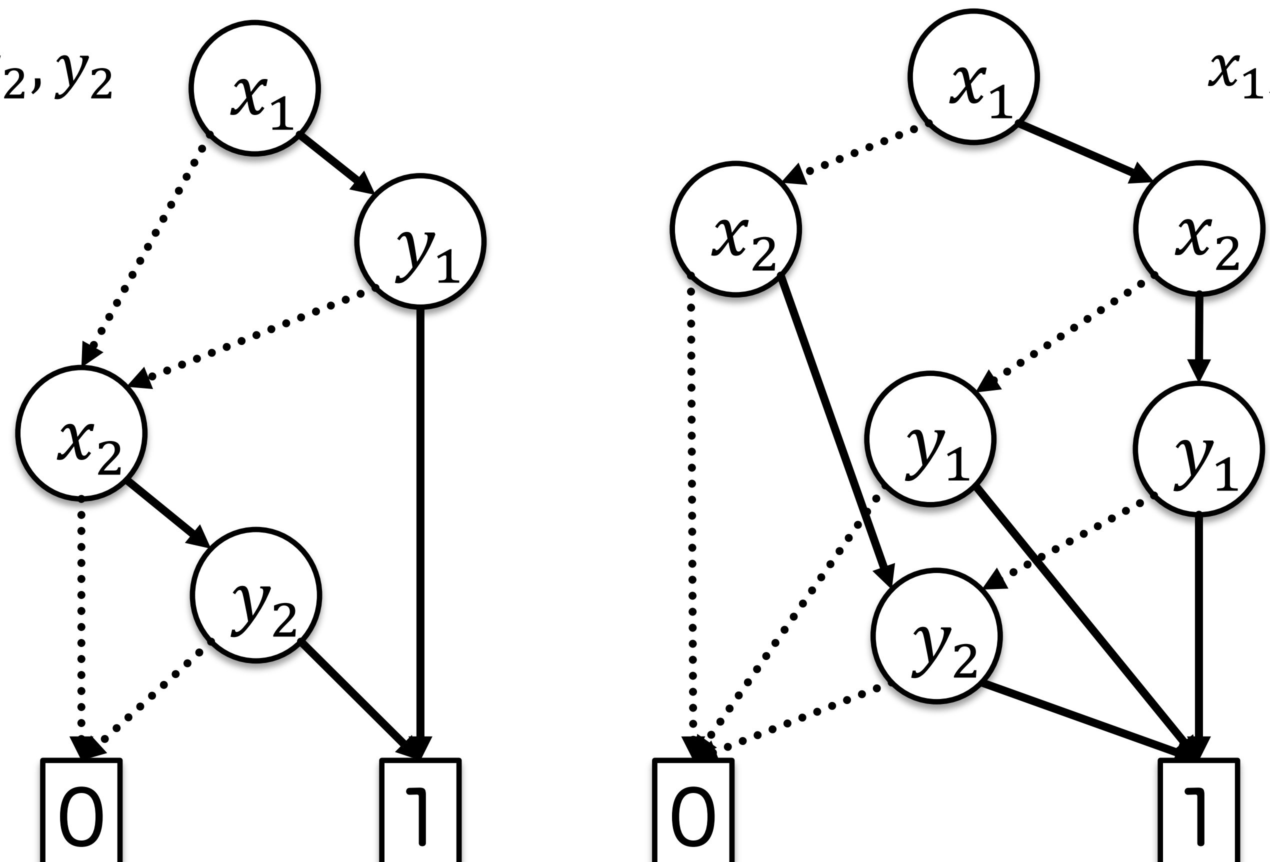


ある変数順序で、サイズが小さい例

例： $x_1 y_1 \vee x_2 y_2$

x_1, y_1, x_2, y_2

x_1, x_2, y_1, y_2



ある変数順序で、サイズが小さい例

例： $x_1 y_1 \vee x_2 y_2 \vee \cdots \vee x_n y_n$

次の 2 つの変数順序を考える.

- $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2, \ldots, x_n,\ y_n \rightarrow$ サイズ：O(n)
- $x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ y_1,\ y_2 \ldots, y_n \rightarrow$ サイズ：$O(2^n)$

なぜ，これほどサイズに差がでるのか自分で考えてみること.

練習問題 4

2 bitの 2 進数 a: $a_1 a_0$ と b: $b_1 b_0$ を考える。

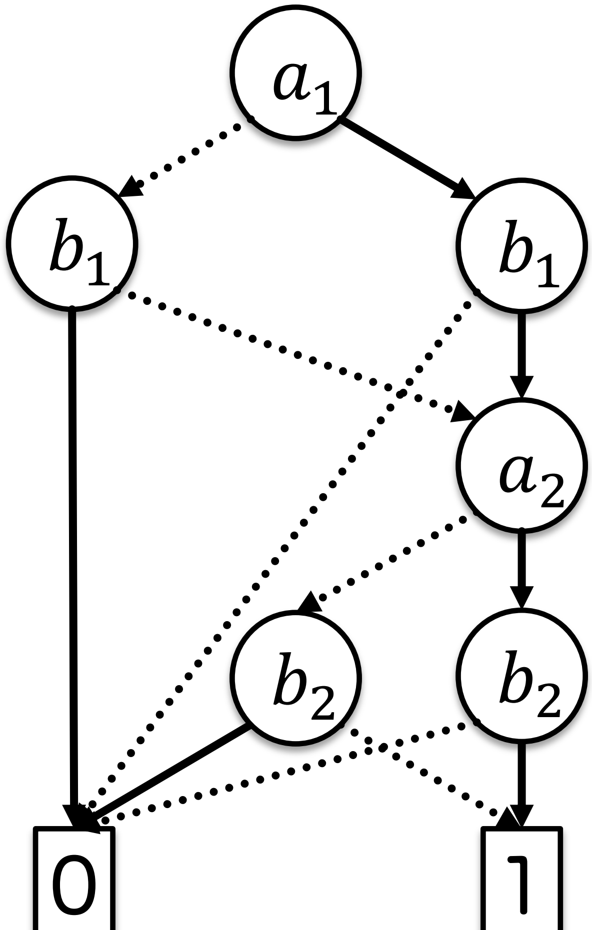
$a = b$ の時に 1、それ以外は 0 を出力する

論理関数 $f(a_1, a_0, b_1, b_0)$ を表す BDD のうち、

最小サイズの変数順序および最大サイズの変数順序を求めよ。

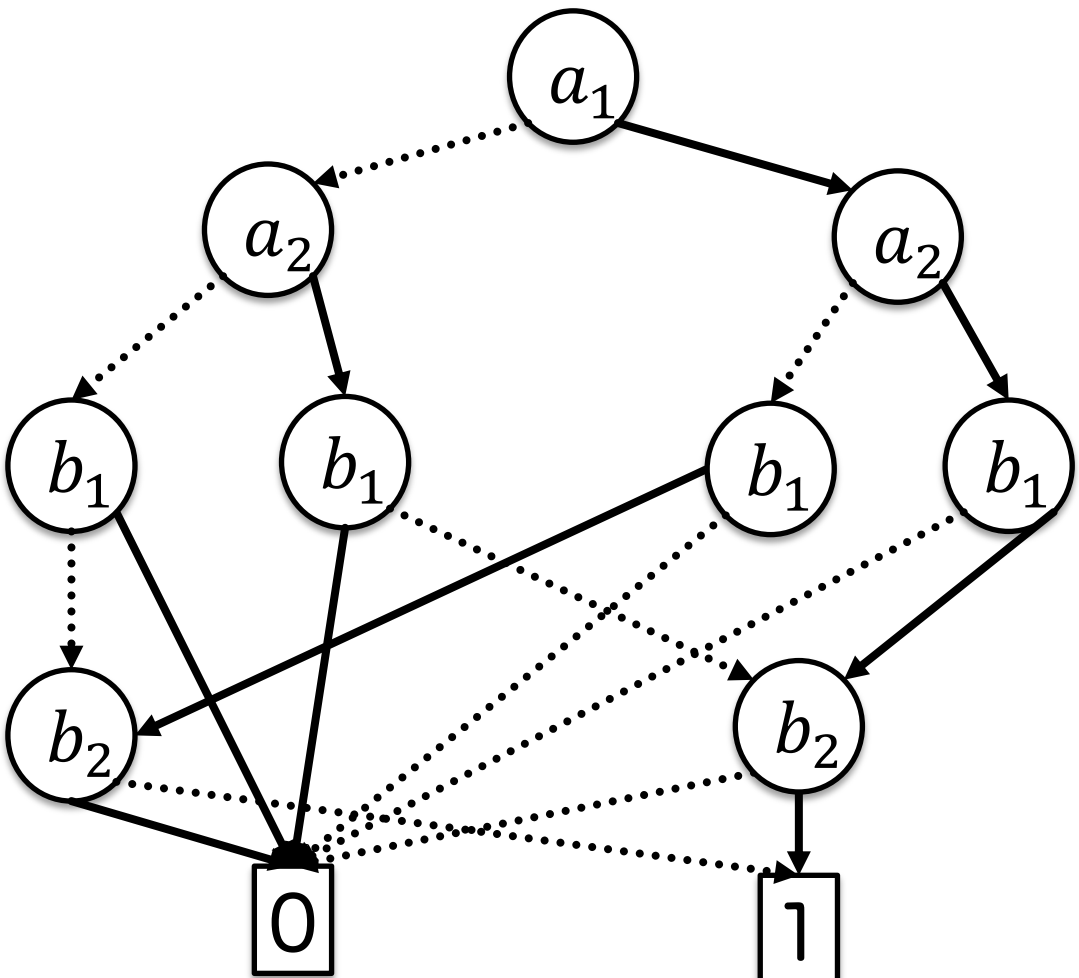
練習問題 4（解答）

最小サイズ



練習問題 4（解答）

最大サイズ



まとめ

二分決定木と二分決定グラフ（ BDD ）

- 変数の順序がサイズに大きく影響する場合がある
- サイズを最小化する変数順序を見つけることは難しい