大規模知識処理特論

第１２回

脊戸　和寿

本日のお話

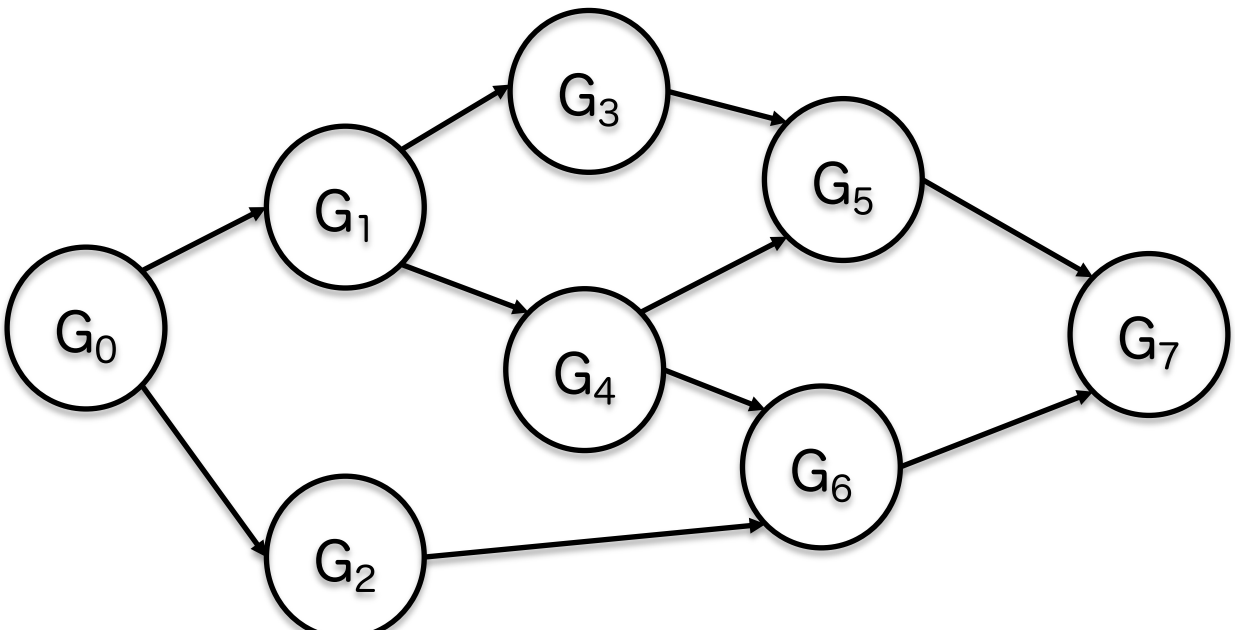
グラフ計算論法と計算量理論に関する研究について知る

- Graph Calculus
- Hajós CalculusとHajós number
- Hajós numberとNP vs. coNP
- Hajós numberとProof Complexity

Graph Calculus

初期グラフ G_0 とグラフ生成規則の集合Rが与えられる.

G_0 からスタートして生成規則を適用し，グラフを次々に生成していく.



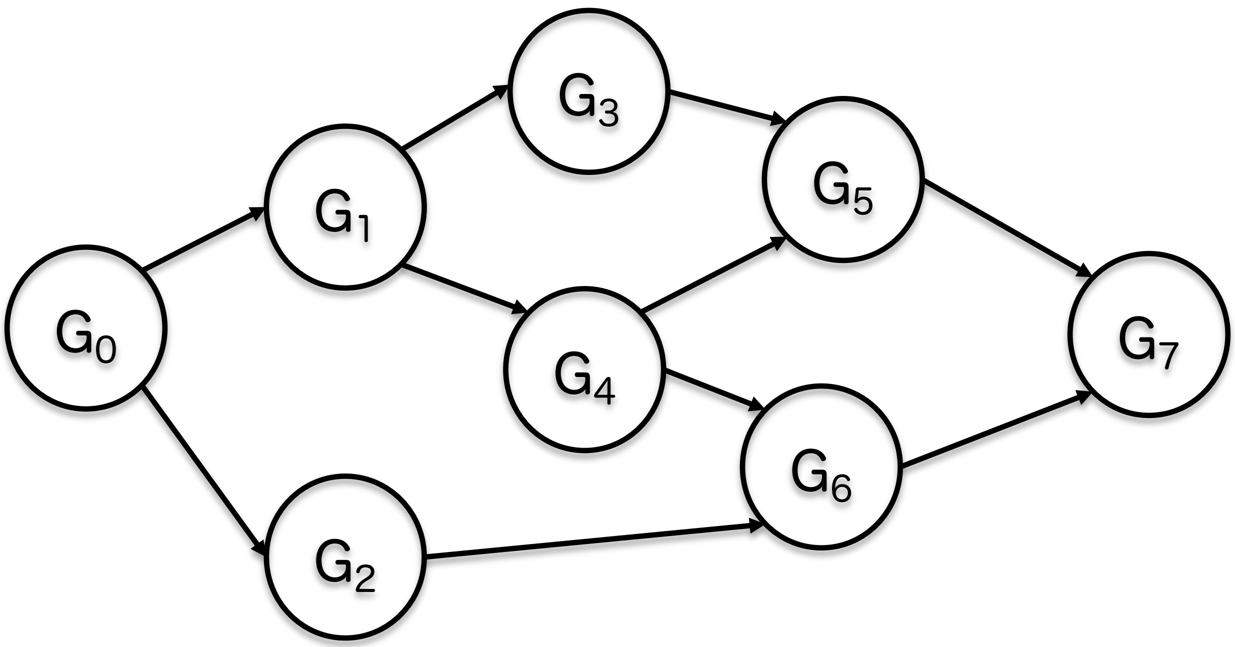
Graph Calculus

生成される全てのグラフは特定の性質を満たしている

・三角形を持たない.

・ハミルトン閉路を持つ.

・３彩色不能である.



Graph Calculus

Completeness と Soundness が重要

今，Graph Calculus Aにより性質 B をもつグラフを生成することを考える.

<u>Completeness</u>

性質 B をもつ全てのグラフは A により生成可能である.

<u>Soundness</u>

A により生成されるグラフは性質 B をもつ.

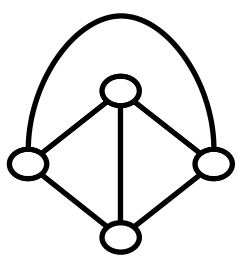
Hajós Calculus（Hajós 1961）

k彩色不能なグラフを生成するGraph Calculus

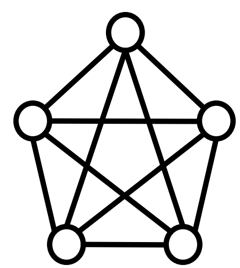
・１つの初期グラフと３つの生成規則

<u>初期グラフ</u>

完全グラフ K_{k+1}（ k 彩色不能な最小頂点のグラフ）



K_4
３彩色不能

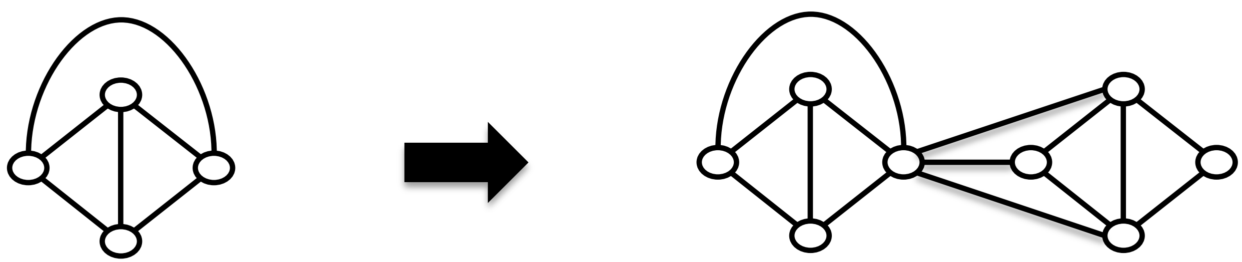


K_5
４彩色不能

Hajós Calculus（Hajós 1961）

<u>生成規則 Vertex / Edge Introduction</u>

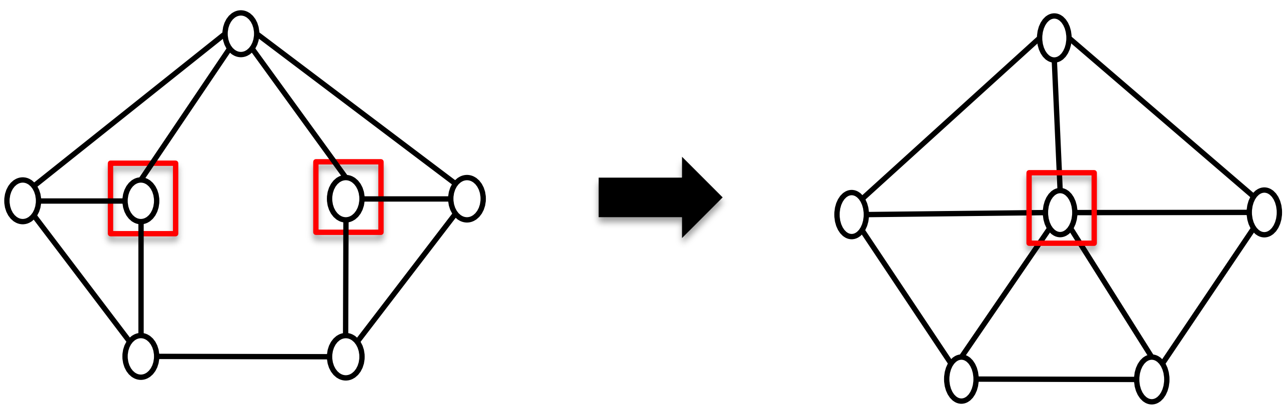
任意の頂点と枝を追加することができる.



Hajós Calculus（Hajós 1961）

生成規則 Contraction

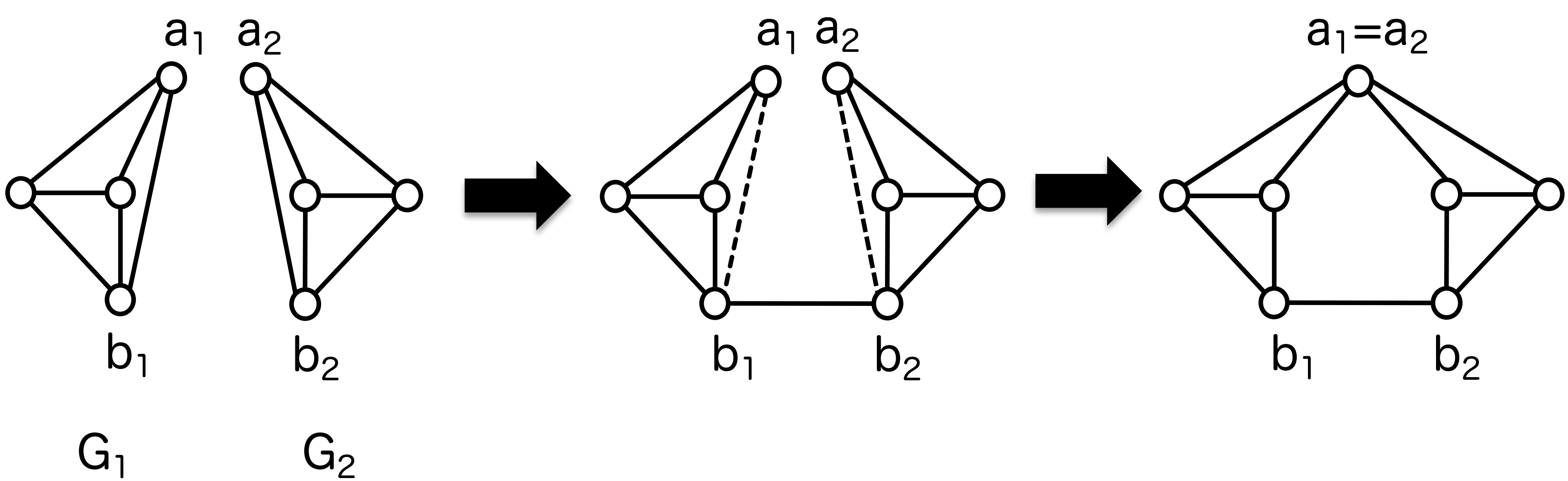
隣接していない頂点を縮約できる.



Hajós Calculus（Hajós 1961）

<u>生成規則 Join</u>

任意の２つのグラフを特定の操作で結合する.



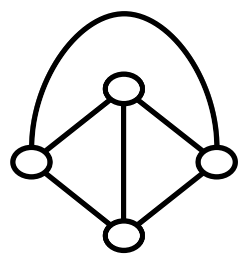
Hajós CalculusのSoundness

Soundness

Hajós Calculus により生成されるグラフは k 彩色不能である.

簡単のため k = 3 を考える.

初期グラフ：K_4



各生成規則が３彩色不能性を保てるかを示せればよい.

・Vertex/Edge Introductionは自明.

Hajós CalculusのSoundness

生成規則 Join

G_1 と G_2 を結合して G_3 を生成することを考える.

示すこと

G_1 が３彩色不能 かつ G_2 が３彩色不能 ⇒ G_3 は３彩色不能

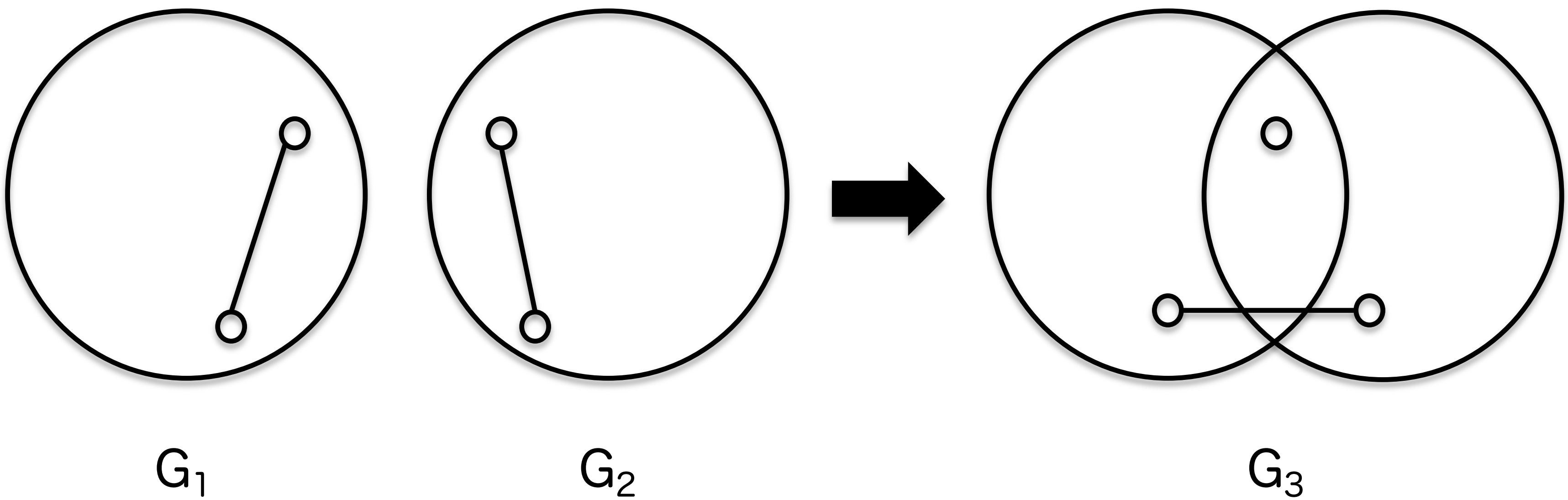
対偶

G_3 が３彩色可能 ⇒ G_1 が３彩色可能 または G_2 が３彩色可能

Hajós CalculusのSoundness

<u>対偶</u>

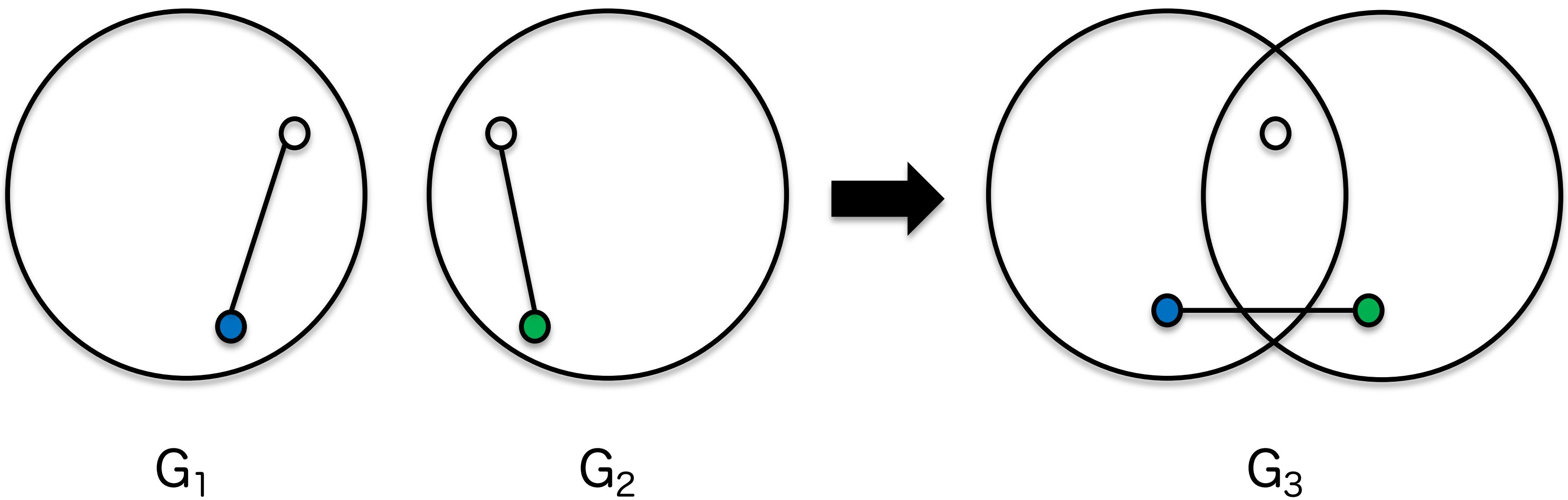
G_3 が３彩色可能 ⇒ G_1 が３彩色可能 または G_2 が３彩色可能



Hajós CalculusのSoundness

<u>対偶</u>

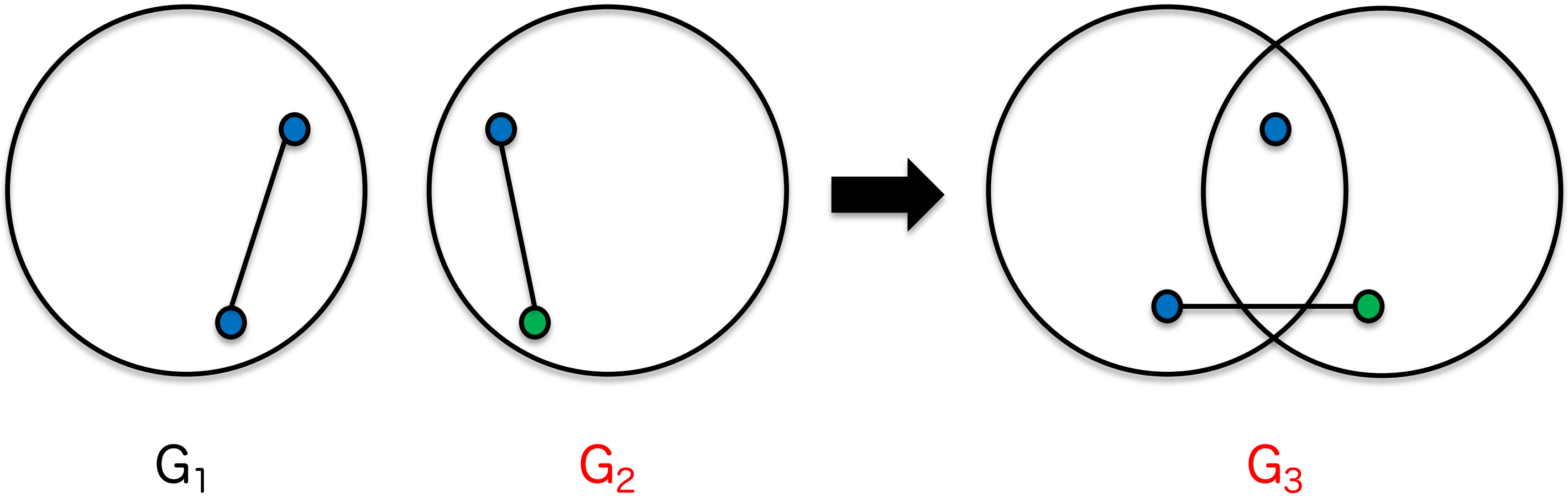
G_3 が３彩色可能 ⇒ G_1 が３彩色可能 または G_2 が３彩色可能



Hajós CalculusのSoundness

<u>対偶</u>

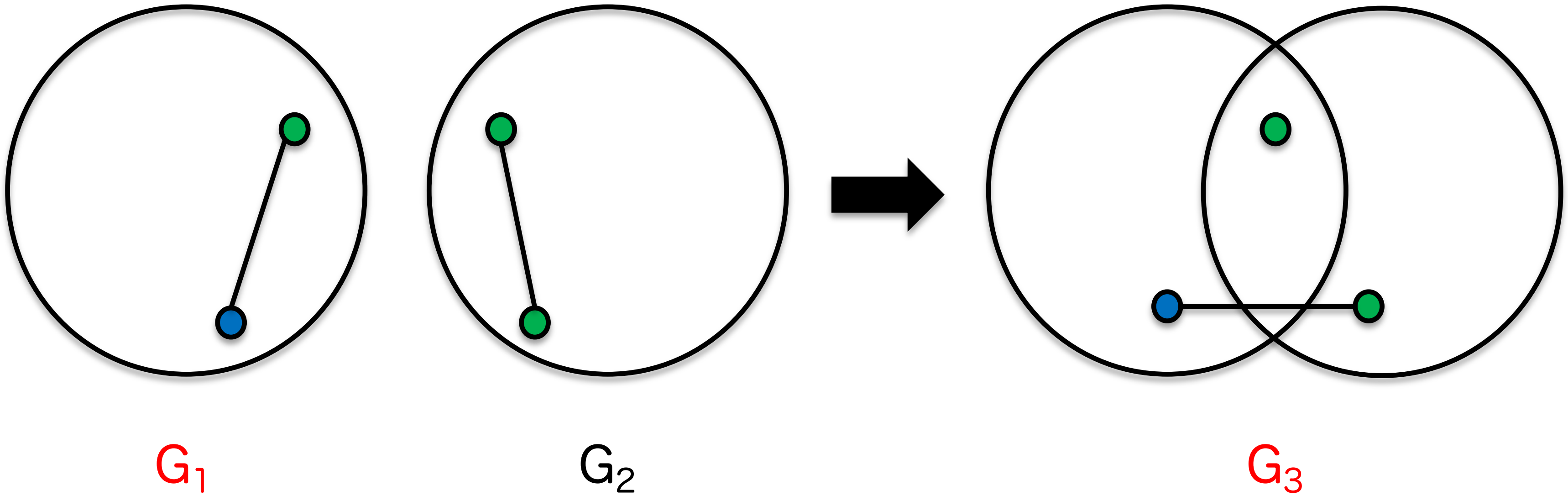
G_3 が３彩色可能 ⇒ G_1 が３彩色可能 または G_2 が３彩色可能



Hajós CalculusのSoundness

<u>対偶</u>

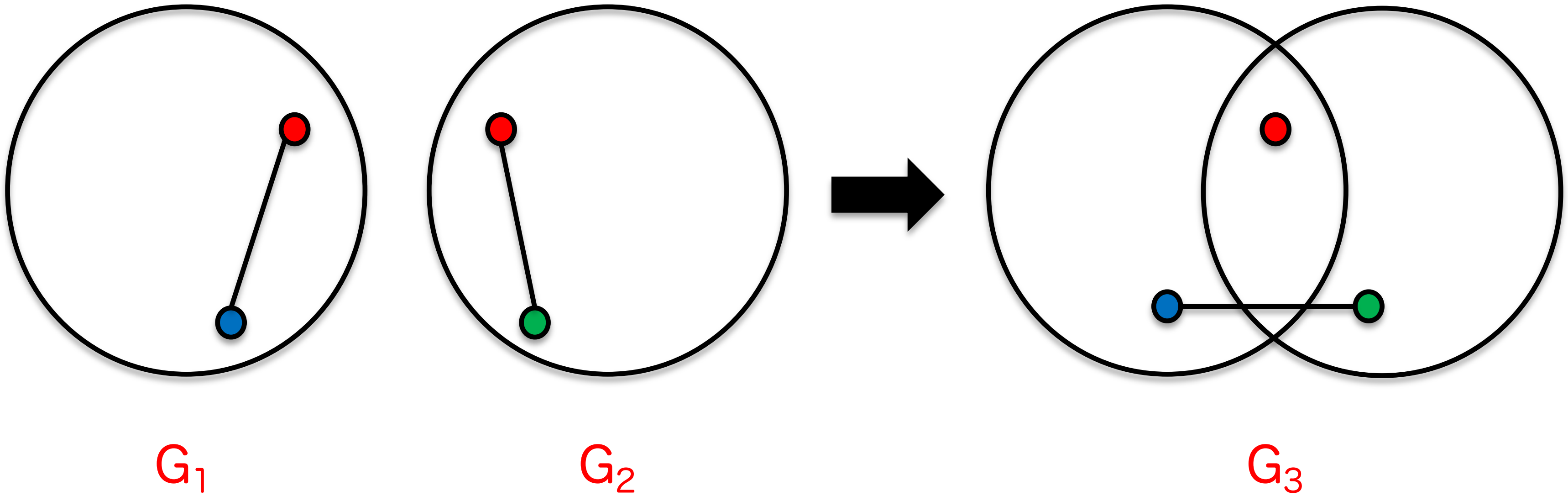
G_3 が３彩色可能 ⇒ G_1 が３彩色可能 または G_2 が３彩色可能



Hajós CalculusのSoundness

<u>対偶</u>

G_3が３彩色可能 ⇒ G_1が３彩色可能 または G_2が３彩色可能



HajósCalculusのSoundness

生成規則 Contraction

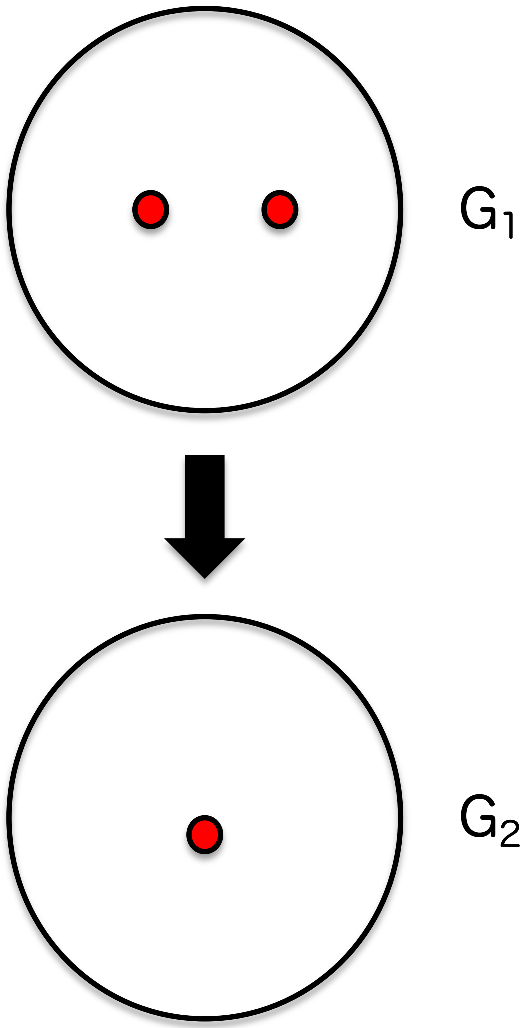
Joinと同じで対偶を考えればよい.

示すこと

G_1 が３彩色不能 ⇒ G_2 は３彩色不能

対偶

G_2 が３彩色可能 ⇒ G_1 が３彩色可能



Hajós CalculusのCompleteness

Completeness

Hajós Calculusにより全ての k 彩色不能なグラフが生成可能.

Hajós (1961）

Hajós CalculusはCompleteである.

Hajós Calculus

全ての k 彩色不能なグラフを生成可能かつ k 彩色不能なグラフのみを生成するGraph Calculusである.

Hajós Calculusと四色定理

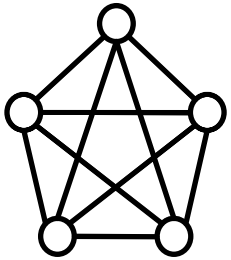
四色定理（Appel and Haken 1976）

全ての平面グラフは４彩色可能である.

４彩色不能なグラフには平面グラフはない.

⇒ K_5 からスタートする Hajós Calculus を用いたときに,

平面グラフが生成されないことを示すことができれば四色定理の別証明となる.



K_5
４彩色不能

Hajós Calculusの計算量

Hajós Number h(G)（Mansfield and Welsh 1982）

K_{k+1} からスタートして，k 彩色不能なグラフ G をHajós Calculusにより生成するために必要な生成規則の適用回数.

Mansfield and Welsh 1982

n 頂点，m ($\leq n^2/3$) 辺のグラフ G の h(G) は,

$$h(G) \leq 2^{\frac{n^2}{3} - m + 1} - 1$$

を満たす.

判定問題

Yes か No で答えることができる問題

<u>k彩色問題</u>

入力：グラフ G と彩色数 k

問い：G は k 彩色可能か？

<u>ハミルトン閉路問題</u>

入力：グラフ G

問い：G はハミルトン閉路を持つか？

クラス P と NP

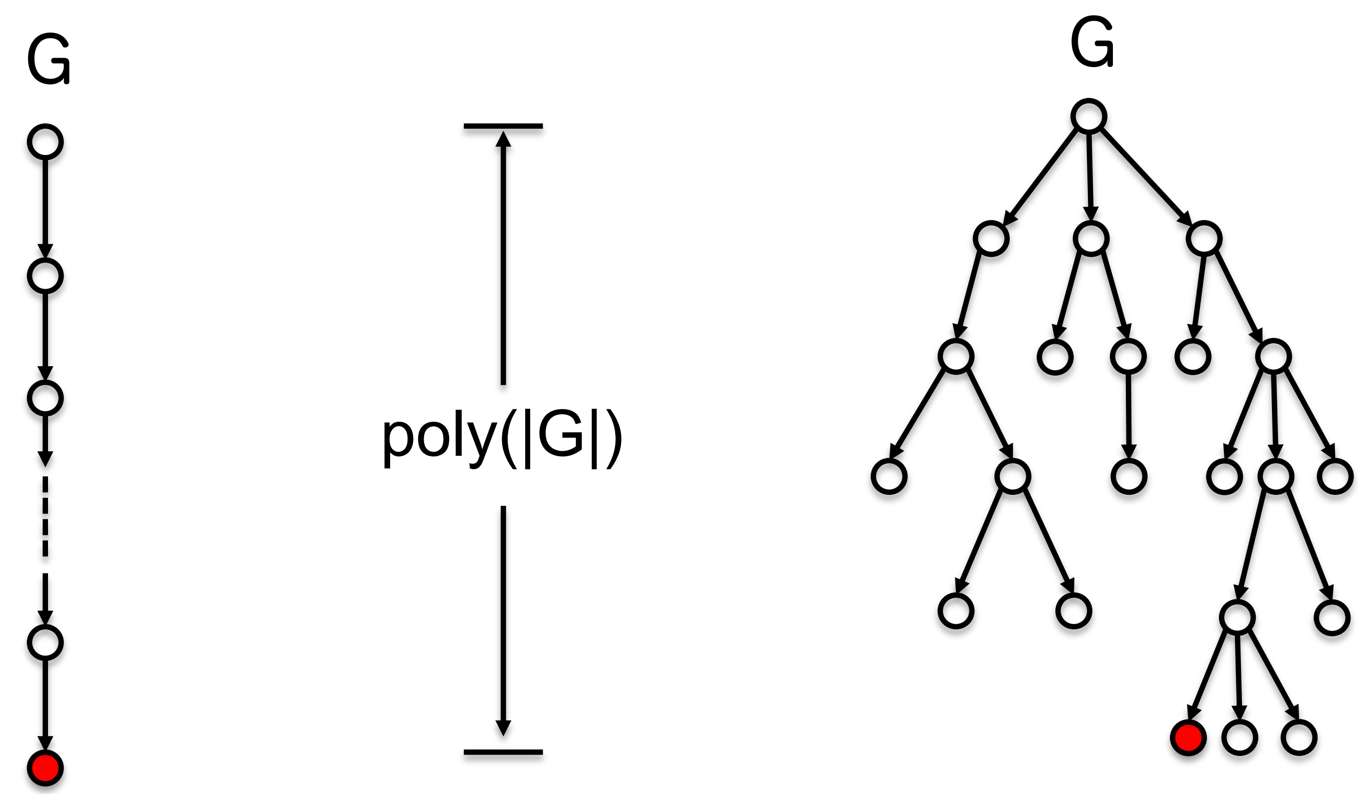
クラス P

決定性 Turing 機械で問題の入力サイズの多項式ステップでYes / Noを判定できる問題のクラス.

クラス NP

非決定性 Turing 機械で問題の入力サイズの多項式ステップでYes / Noを判定できる問題のクラス.

クラス P と NP



クラス P　　　　　　　クラス NP

クラス NP の別定義

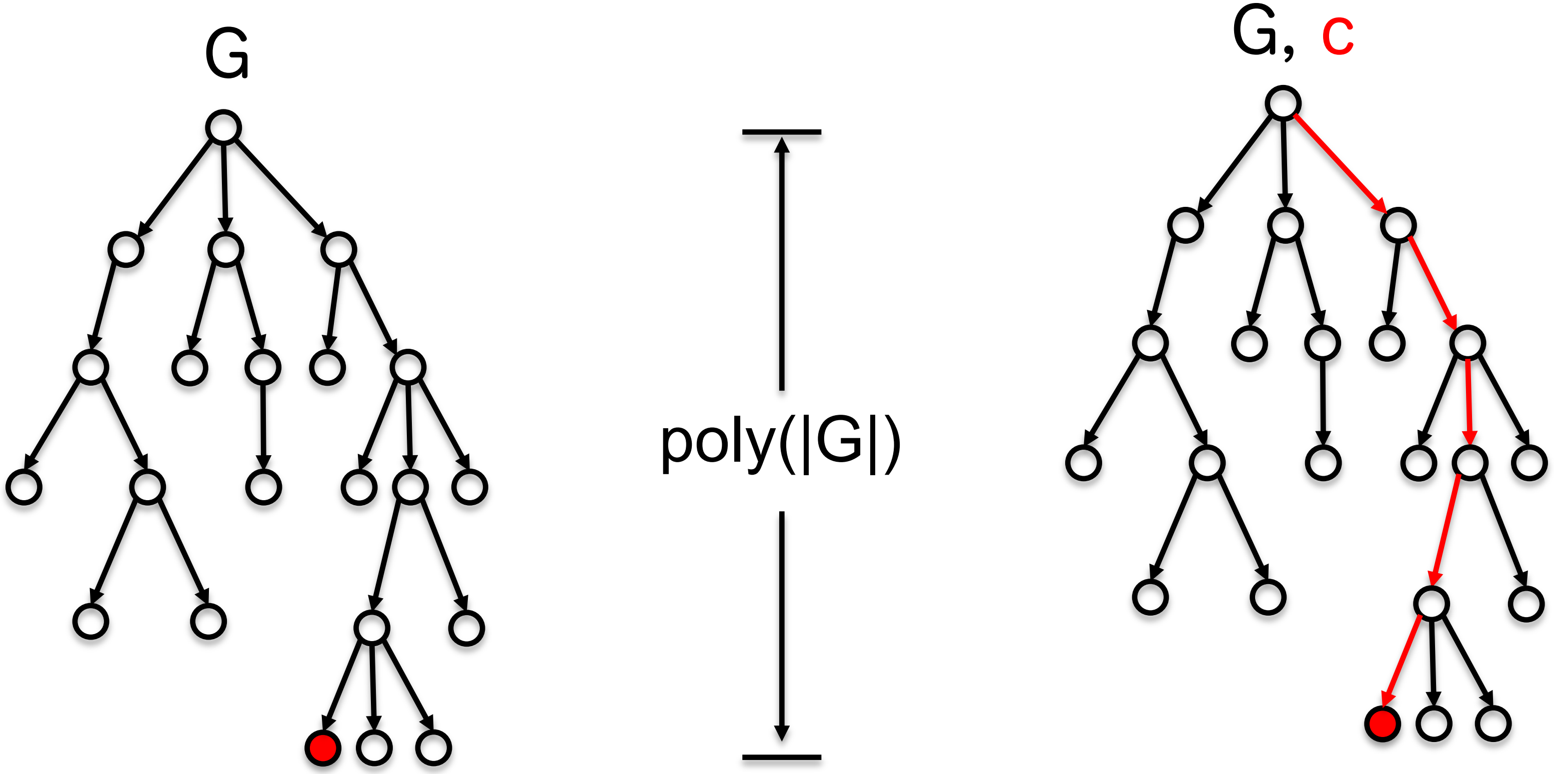
クラス NP

問題のインスタンスと Yes となる証拠（例えば解）が与えられたとき，決定性 Turing 機械により入力サイズの多項式ステップで Yes であることを判定できる問題のクラス.
ただし，証拠のサイズはインスタンスサイズの多項式である.

例：３彩色問題

３彩色可能な G と彩色方法 c が与えられると決定性 Turing 機械により多項式ステップで Yes と判定できる.

クラス NP

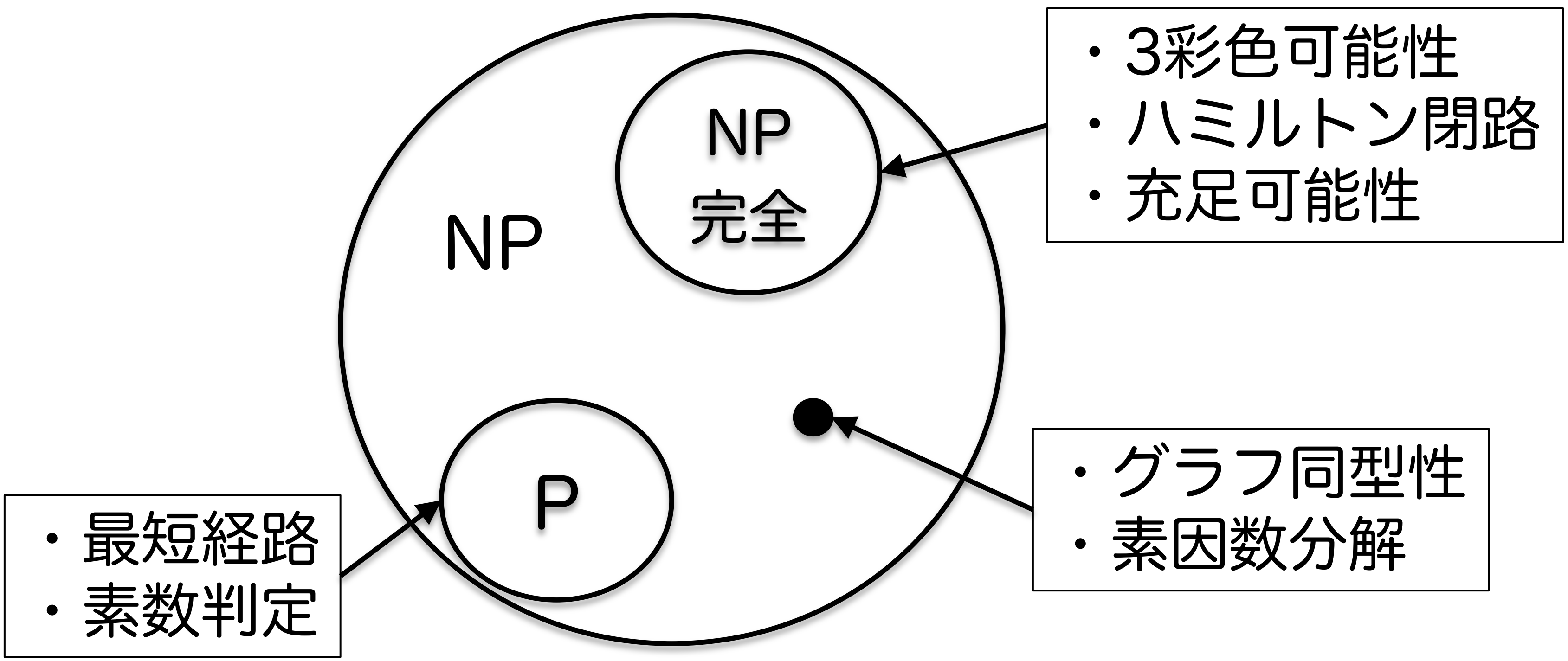


クラス NP　　　　クラス NP

P vs. NP

クラス P とクラス NP は等しいのか？

クレイ数学研究所から100万ドルの賞金.



coNP

NP の補問題

<u>３彩色不能性</u>

入力：グラフ G

問い：G は３彩色不能か？

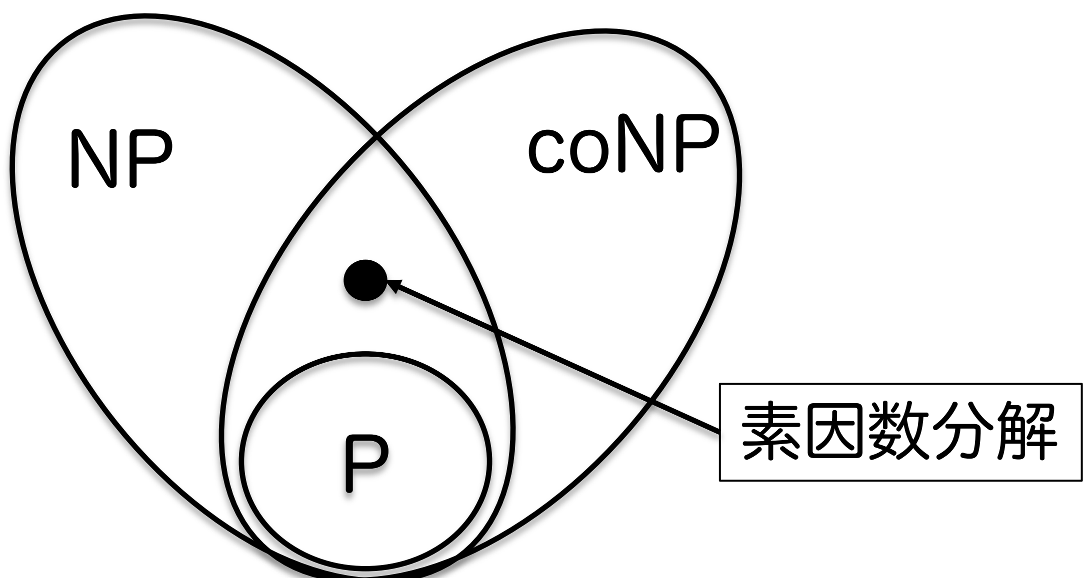
<u>クラス NP</u>

Yes である証拠のサイズが入力サイズの多項式

P vs. NP vs. coNP

P = NP ⇒ NP = coNP

No である証拠のサイズが入力サイズの多項式 ⇒ NP = coNP



Hajós Number と NP vs. coNP

Hajós Number h(G)（Mansfield and Welsh 1982）

K_{k+1} からスタートして，k 彩色不能なグラフ G を Hajós Calculus により生成するために必要な生成規則の適用回数.

Fact

任意の３彩色不能な n 頂点，m 枝のグラフ G に対して，

$$h(G) = poly(\max(n, m))$$

であれば，NP = coNP.

Satisfiability Problem

Satisfiability Problem（SAT）

入力：論理式 f

出力：f が充足可能（ f を 1 にする割当が存在する）か？

例

$$f = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2})$$

$x_1 = 0, x_2 = 1$ とすれば充足可能.

Unsatisfiability Problem

Unsatisfiability Problem（UNSAT）

入力：論理式 f

出力：f が充足不能か？

例

$$f = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$$

どんな割当に対しても充足可能にはならない.

Proof Complexity

与えられた問題と Yes と判定するために，必要な証拠のサイズを定量的に評価する研究.

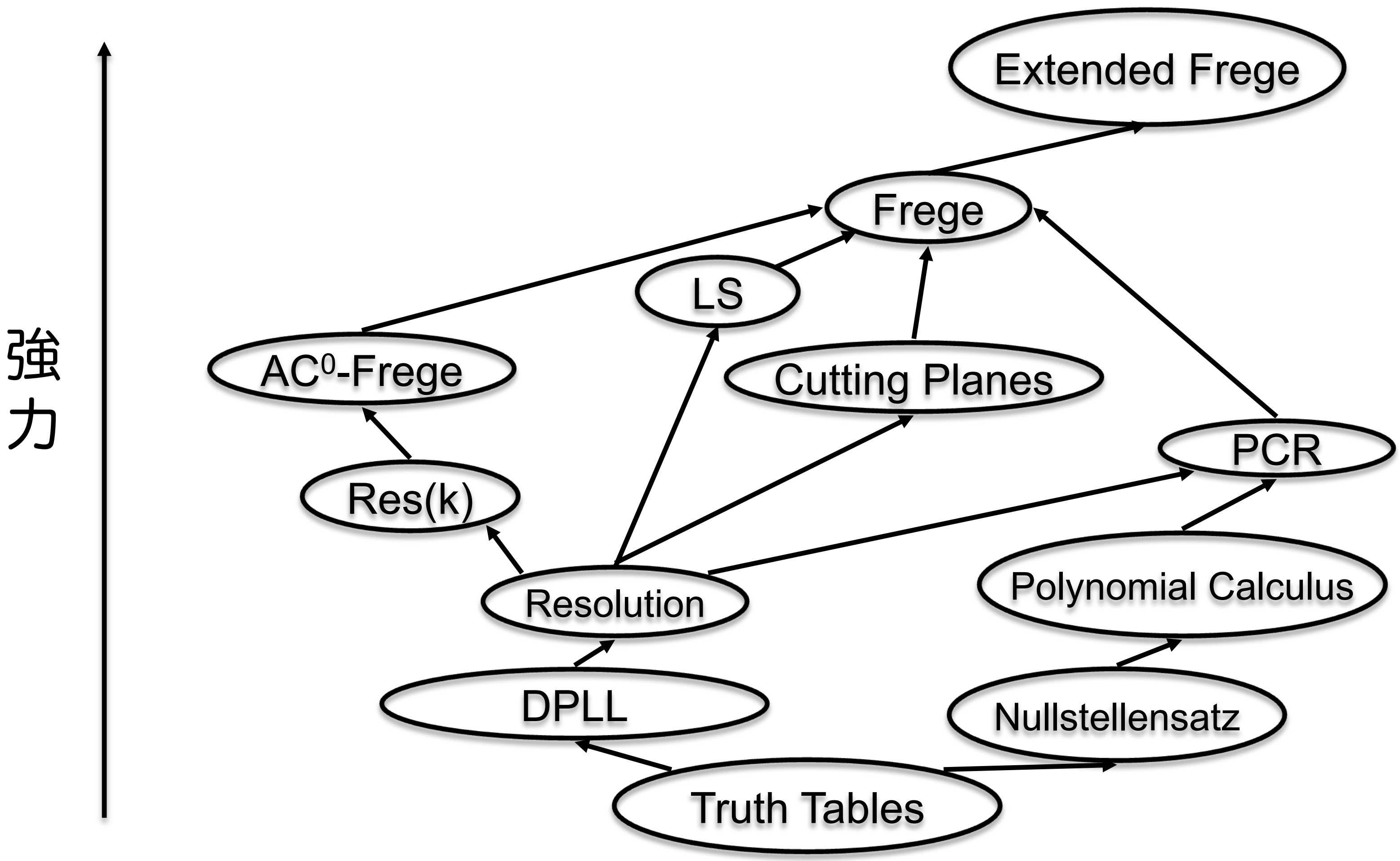
<u>クラス NP</u>

証拠のサイズ：問題のサイズの多項式

判定時間：問題のサイズと証拠のサイズの多項式

Proof System

UNSAT を判定するための証拠を生成する計算機構



Resolution

$$C \vee x,\ C' \vee \overline{x} \to\ C \vee C'$$

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_8$$

$C_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

$C_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$C_3 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$

$C_4 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$C_5 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$

$C_6 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$

$C_7 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$C_8 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$C_9 = x_1 \vee x_2$

$C_{11} = \overline{x_1} \vee x_2$

$C_{10} = \overline{x_2} \vee x_3$

$C_{12} = \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$C_{13} = x_2$

$C_{14} = \overline{x_2}$

$x_2 \wedge \overline{x_2}$

UNSAT !!

Proof ComplexityとcoNP

Cook and Reckhow (1979)

任意の UNSAT な n 変数，m 節の論理式 f に対して，サイズが n と m の多項式となる証拠を生成する Proof System が存在する ⇔ NP = coNP.

Fact

任意の Proof System に対して，多項式サイズの証明を得ることができない UNSAT な論理式が存在するならば，NP ≠ coNP．つまり，P ≠ NP.

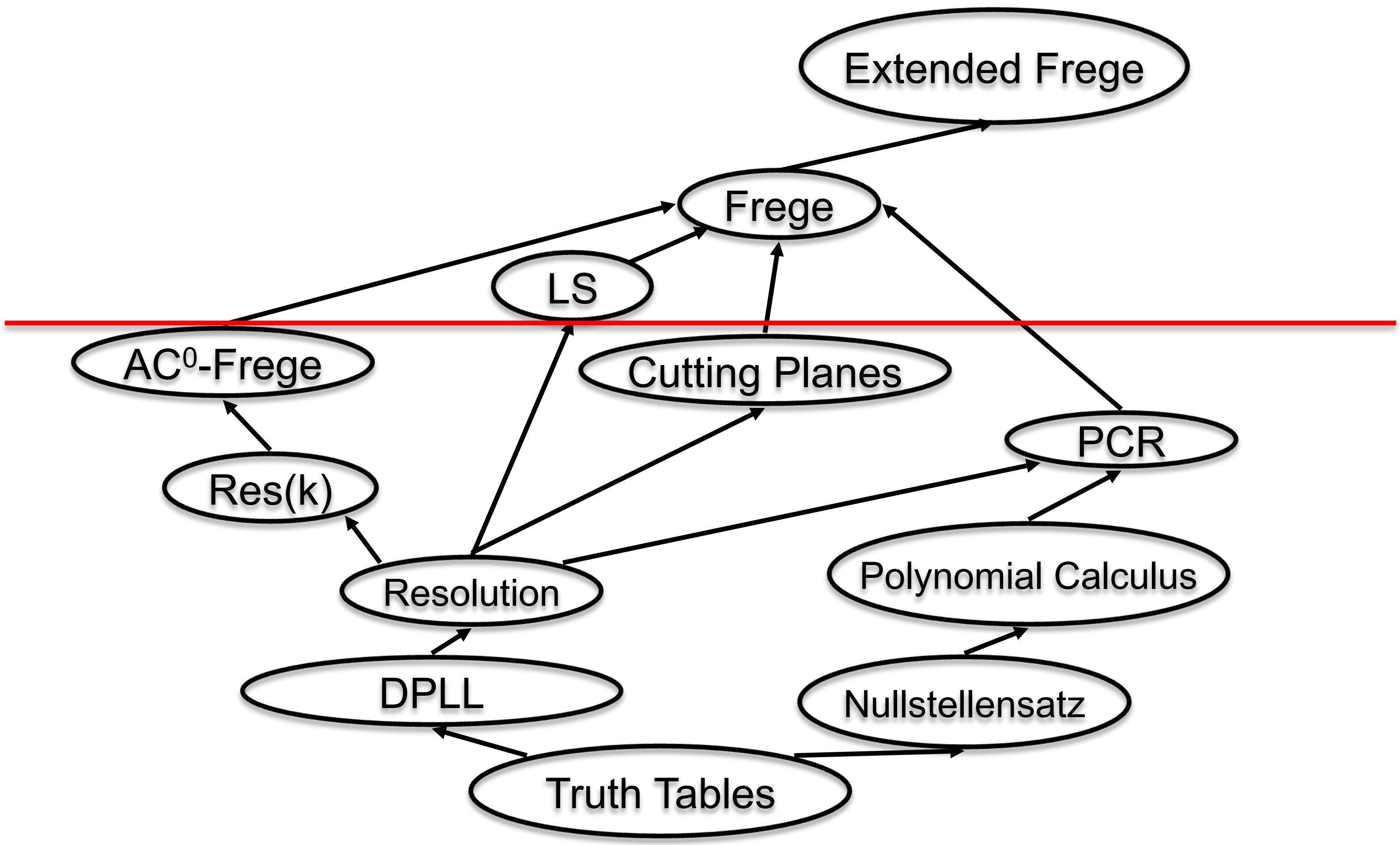
NP vs. coNP 問題へのアプローチ

任意の Proof System に対して，多項式サイズの証明を得ることができない UNSAT な論理式を見つける.

<u>Step by Step</u>

より強い Proof System に対して，多項式サイズの証明を得ることができない UNSAT な論理式を見つける.

現在の状況



Extended Frege
Frege
LS
AC⁰-Frege
Cutting Planes
PCR
Res(k)
Resolution
Polynomial Calculus
DPLL
Nullstellensatz
Truth Tables

Non-3-Colorability と Hajós Calculus

Non-3-Colorability (Non3COL)

入力：グラフ G

出力：G が３彩色不能か？

Hajós Calculus は Non3COL の Proof System とみなすことができる.

Proof System と Graph Calculi

Proof System for UNSAT

任意の UNSAT な n 変数，m 節の論理式 f に対して，サイズが n と m の多項式である証拠を生成する Proof System が存在する ⇔ NP = coNP.

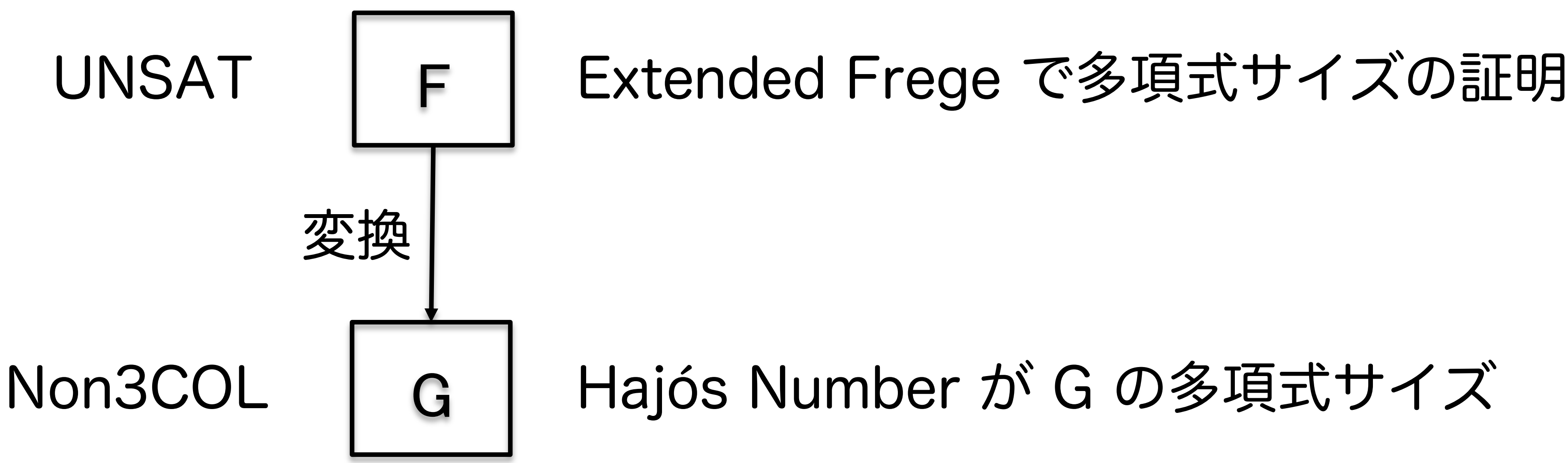
Graph Calculi for Non3COL

任意の３彩色不能な n 頂点，m 辺のグラフ G に対して，Hajós Number が n と m の多項式であれば，NP=coNP.

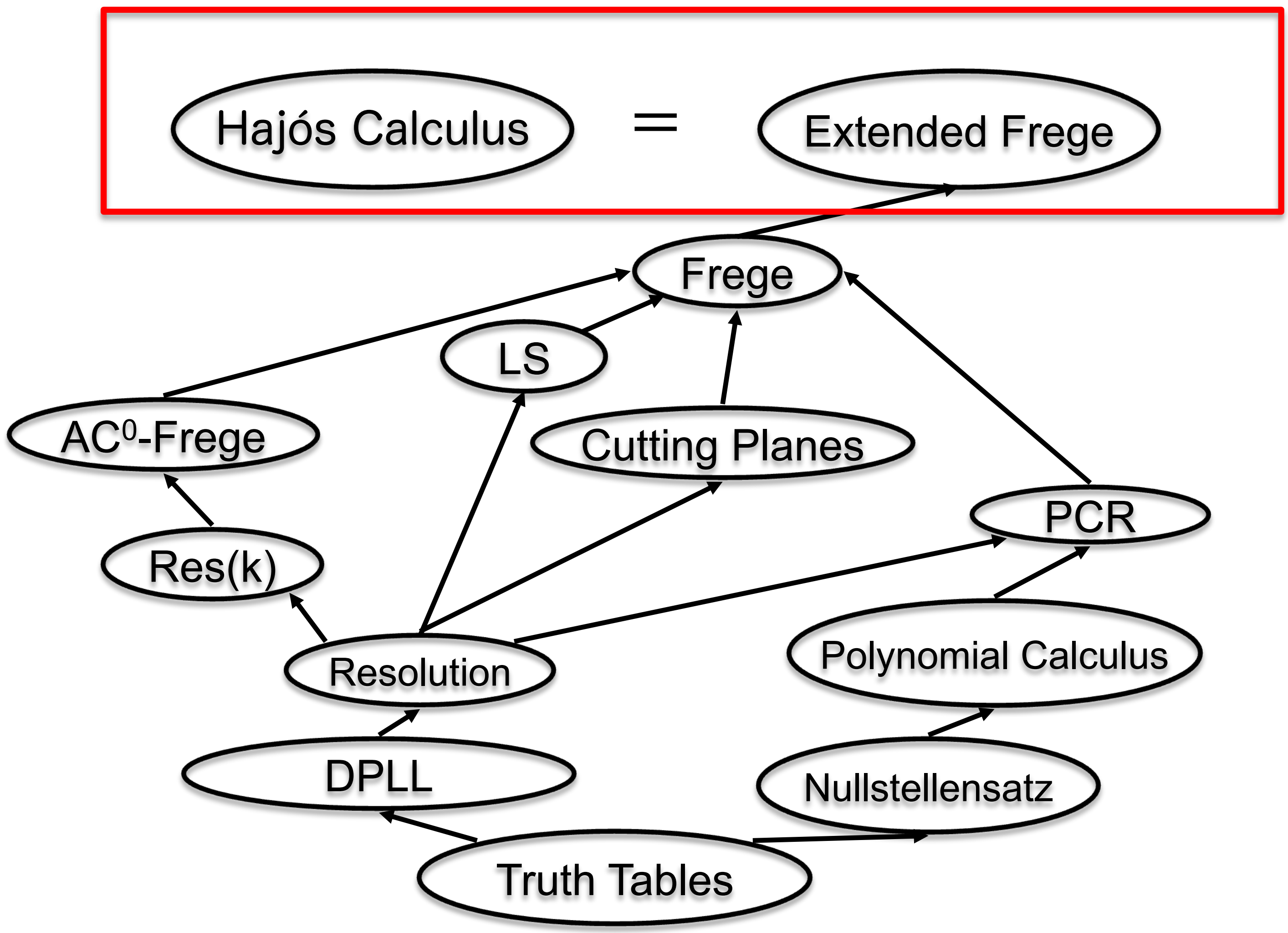
Proof System と Hajós Calculus

<u>Pitassi and Urquhart 1995</u>

Extended Frege System が多項式サイズの証拠で UNSAT を証明できる論理式 F に対応する Non3COL のグラフ G の Hajós Number は G のサイズの多項式で抑えられる.



Proof SystemとHajós Calculus



NP vs. coNP 問題へのアプローチ

任意の Proof System に対して，多項式サイズの証明を得ることができない UNSAT な論理式を見つける．

⬇

より強い Proof System に対して，多項式サイズの証明を得ることができない UNSAT な論理式を見つける．

⬇

Hajós Number が超多項式のグラフを見つける．

まとめ

グラフ計算論法と計算量理論研究の紹介

- k 彩色不能なグラフを生成する Hajós Calculus
- Proof System と coNP問題
- Hajós Calculus と NP vs. coNP 問題